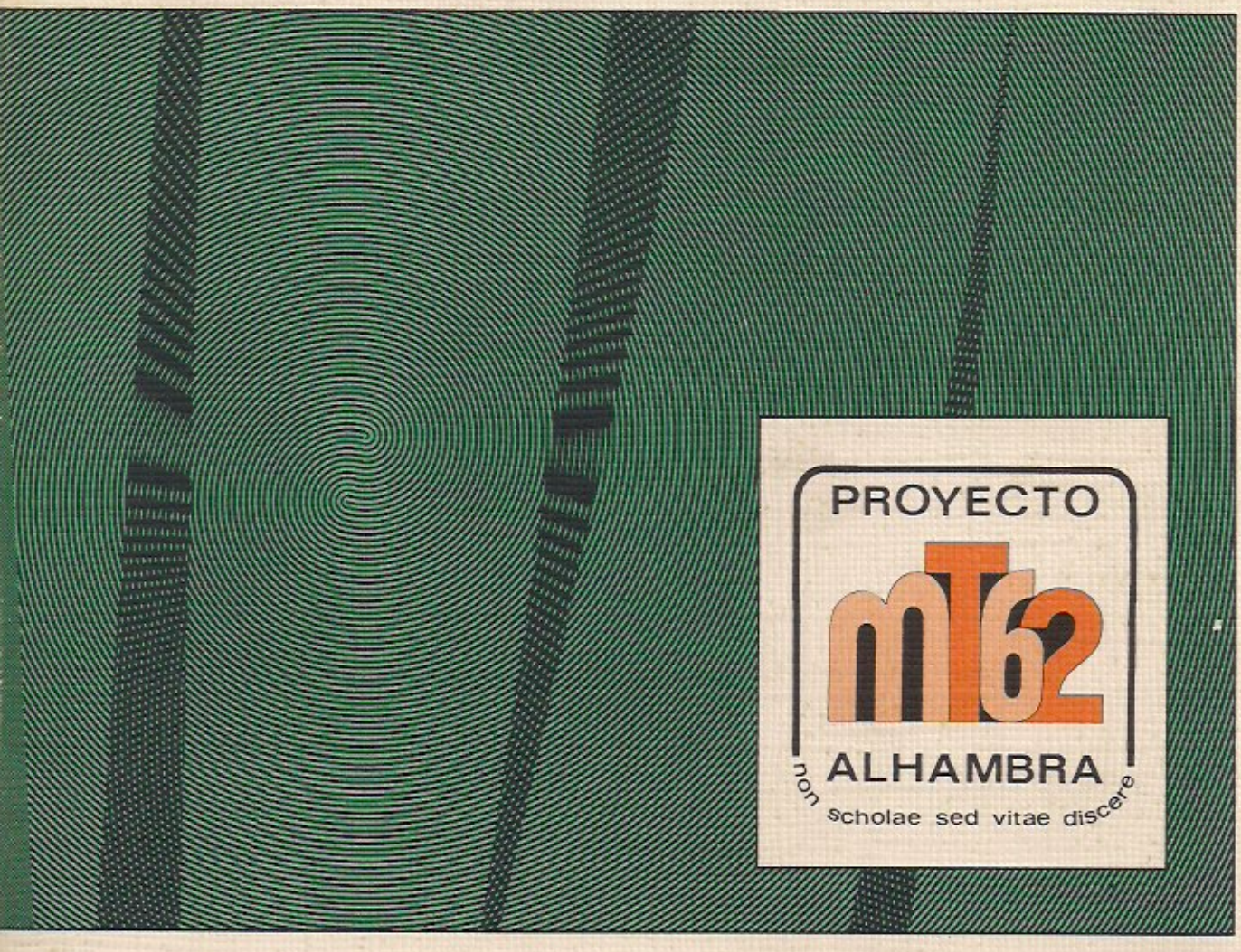
SERIE A

Hacia la MATEMATICA · 3

A. NEGRO · S. PEREZ CACHO · S. THIO DE POL



PROYECTO mT62
ALHAMBRA
non scholae sed vitae discere

politécnica
canaima
librería
senador castillo olivares, 5
t.fno.37 32 20 las palmas

1044

PROYECTO

mT62

ALHAMBRA

non scholae sed vitae discere

PROYECTO **MT-62** ALHAMBRA

COMITE EDITORIAL

Adolfo Negro

Jefe del Departamento de Matemáticas del C.N.S.R. de Madrid. Profesor del I.C.E. de la Universidad de Deusto

Fernando Marín Alonso

Jefe del Departamento de Física del C.N.S.R. de Madrid
Profesor del C.U. de Madrid

José M. Esteban

Profesor de Química de la E.T.S. de Ingenieros de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid

Departamentos

Coordinación, control y seguimiento
Ciencias de la Naturaleza
Ciencias de la Educación
Lengua y Literatura
Socioantropología
Matemáticas
Química
Física

PROYECTO

mT62

ALHAMBRA

non scholae sed vitae discere

HACIA LA MATEMATICA-3

ADOLFO NEGRO

SANTIAGO PEREZ CACHO

SANTIAGO THIO DE POL

Alhambra

Primera edición, 1977

EDITORIAL ALHAMBRA, S. A.
R. E. 182
Madrid-1. Claudio Coello, 76

Delegaciones:

Barcelona-8. Enrique Granados, 61
Bilbao-14. Doctor Albiñana, 12
La Coruña. Pasadizo de Pernas, 13
Málaga. La Regente, 5
Oviedo. Avda. del Cristo, 9
Sevilla-12. Reina Mercedes, 35
Valencia-3. Cabillers, 5

México

Editia Mexicana, S. A.
México-6, D.F. Lucerna, 84-105
Apart. 61-261

Rep. Argentina

Editorial Siluetas, S. A.
Buenos Aires-1201, Bartolomé Mitre, 3745/49

Perú

Editia Peruana, S. R. Ltda.
Lima. José Díaz, 208

n c 24030010

© Es propiedad de los autores.
Reservados todos los derechos.

ISBN 84-205-0558-7 (obra completa)

ISBN 84-205-0364-9 (vol. 3)

Depósito legal: M. 26433 - 1977

Impreso en España - Printed in Spain

Selecciones Gráficas - Carretera de Irún, km. 11,500 - Madrid (1977)

Indice general

Capítulos *Páginas*

UNIDAD TEMATICA **1 - PRODUCTO ESCALAR**

1.1 Producto escalar ... 3

Proyecciones, 3. Producto escalar, 6. Propiedades del producto escalar, 7. Vectores ortonormales. Base ortonormal, 9. Expresión del producto escalar en una base ortonormal, 10. Angulo de dos vectores, 12. Interpretación de las componentes de un vector, 13. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.1, 14.

1.2 Trigonometría plana ... 16

Introducción, 16. Coseno de la diferencia de dos ángulos, 16. Coseno de una suma. Seno de una suma y de una diferencia, 17. Tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos, 19. Razones goniométricas del ángulo doble y del ángulo mitad, 20. Fórmulas de transformación en producto, 23. Trigonometría plana, 25. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.2, 31.

1.3 El número complejo ... 40

El plano complejo, 40. Módulo y argumento de un número complejo, 41. Determinación del módulo y del argumento de un número complejo, 43. Forma polar de un número complejo, 44. Producto de números complejos en forma polar, 46. Inverso de un complejo. Cociente de números complejos, 47. El grupo de los complejos unimodulares, 50. Interpretación geométrica del producto de complejos, 51. Potenciación de complejos. Fórmula de De Moivre, 54. Raíces enésimas de un complejo, 56. Raíces enésimas de la unidad, 59. Soluciones a los ejercicios del capítulo 1.3, 66.

1.4 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 72

1.5 Autoevaluación A-1 ... 75

Ficha-clave de la autoevaluación A-1, 81.

UNIDAD TEMATICA **2 - GEOMETRIA METRICA PLANA**

2.1 Perpendicularidad ... 85

Sistemas de referencia cartesianos ortogonales, 85. Distancias entre dos puntos, 87. Diversas formas de la ecuación de una recta, 88. Perpendicularidad de rectas, 93. Angulo de dos rectas, 96. Ecuación normal de la recta, 98. Distancia de un punto a una recta, 101. Area del triángulo, 104. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.1, 106.

Capítulos *Páginas*

2.2 Transformaciones geométricas ... 109

Transformación geométrica, 109. El grupo de las traslaciones del plano, 110. El conjunto de los giros del plano, 114. El conjunto de las simetrías axiales del plano, 122. Transformaciones y movimientos en el plano, 128. Homotecia y semejanza, 129. Números complejos y transformaciones geométricas, 134. Soluciones a los ejercicios del capítulo 2.2, 137.

2.3 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 143

2.4 Autoevaluación A-2 ... 146

Ficha-clave de la autoevaluación A-2, 151.

UNIDAD TEMATICA **3 - CONICAS**

3.1 Circunferencia ... 155

Un lugar geométrico, 155. Rectas y circunferencias, 159. Intersecciones de dos circunferencias. Potencia, 162. Eje radical. Centro radical, 166. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.1, 169.

3.2 Elipse ... 174

Proyección de una circunferencia sobre un plano oblicuo, 174. Suma de distancias a dos puntos fijos, 177. El compás elíptico, 181. Circunferencias directrices y tangentes, 182. Secciones del cono de revolución, 186. Orbitas gravitatorias, 187. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.2, 188.

3.3 La hipérbola ... 193

Diferencia de distancias a dos puntos fijos, 193. Circunferencias directrices y tangentes, 197. Secciones del cono, 201. Proporcionalidad inversa: hipérbolas equiláteras referidas a sus asíntotas, 201. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.3, 204.

3.4 La parábola ... 209

Distancia a una recta y a un punto, 209. Tangentes, 212. Traslación y giro de parábolas, 214. Sección del cono, 217. Trayectorias de lanzamiento, 218. Soluciones a los ejercicios del capítulo 3.4, 220.

3.5 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 224

3.6 Autoevaluación A-3 ... 227

Ficha-clave de la autoevaluación A-3, 233.

UNIDAD TEMATICA **4 - CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

4.1 Aproximación lineal. Derivada y diferencial ... 237

Aproximación lineal. Funciones tangentes, 237. Generalización de los conceptos de tangencia y de aproximación, 239. Curvas osculatrices. Radio de curvatura, 239. Diferencial en un punto, 241. Diversas notaciones de la diferencial en un punto a, 242. Función diferencial, 245. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.1, 246.

4.2 Estudio local de funciones. Gráficas ... 249

Derivación y continuidad, 249. Derivada en un punto y monotonía. Extremos locales, 250. Teorema de Rolle, 255. Teorema del valor me-

Capítulos *Páginas*

dio, 256. Teorema de Cauchy y regla de L'Hôpital, 257. Concavidad y convexidad. Inflexiones, 260. Estudio de la gráfica de una función, 262. Optimización, 266. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.2, 271.

4.3 Integral indefinida ... 276

Funciones primitivas, 276. Integrales inmediatas, 280. Métodos de integración, 284. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.3, 288.

4.4 Integral definida. Area ... 291

Integración de funciones escalonadas positivas, 291. Integral de funciones continuas, positivas y monótonas, 294. Regla de Barrow, 296. Aplicaciones de la integral definida, 299. Soluciones a los ejercicios del capítulo 4.4, 302.

4.5 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 307

4.6 Autoevaluación A-4 ... 310

Ficha-clave de la autoevaluación A-4, 315.

UNIDAD TEMATICA **5 - ESTADISTICA**

5.1 Distribuciones y poblaciones aleatorias ... 319

Variable aleatoria, 319. Distribuciones y poblaciones aleatorias, 321. Distribuciones aleatorias: función de probabilidad y función de distribución, 321. Momentos de una distribución, 323. Distribución binomial, 325. Distribución normal, 333. La distribución normal como aproximación de la binomial. Corrección de Yates, 339. Soluciones a los ejercicios del capítulo 5.1, 341.

5.2 Distribuciones bidimensionales ... 345

Dependencia funcional y aleatoria, 345. Tablas y gráficos, 348. Regresión. Regresión lineal, 350. Cálculo abreviado de las rectas de regresión, 353. Correlación, 355. Soluciones a los ejercicios del capítulo, 5.2, 358.

5.3 Ejercicios y problemas de recapitulación ... 361

5.4 Autoevaluación A-5 ... 364

Ficha-clave de la autoevaluación A-5, 368.

UNIDAD TEMATICA 1

PRODUCTO ESCALAR

1.1. Producto escalar

1. *Proyecciones*
2. *Producto escalar*
3. *Propiedades del producto escalar*
4. *Vectores ortonormales. Base ortonormal*
5. *Expresión del producto escalar en una base ortonormal*
6. *Angulo de dos vectores*
7. *Interpretación de las componentes de un vector*

1.2. Trigonometría plana

1. *Introducción*
2. *Coseno de la diferencia de dos ángulos*
3. *Coseno de la suma de dos ángulos. Seno de la suma y de la diferencia de dos ángulos*
4. *Tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos*
5. *Razones goniométricas del ángulo doble y del ángulo mitad*
6. *Fórmulas de transformación en producto*
7. *Trigonometría plana*
   - 7.1. Teorema de los senos
   - 7.2. Teorema del coseno
   - 7.3. Teorema de las tangentes
   - 7.4. Fórmulas de Briggs
   - 7.5. Distintas formas del área de un triángulo

1.3. El número complejo

1. *El plano complejo*
2. *Módulo y argumento de un número complejo*
3. *Determinación del módulo y del argumento de un número complejo*
4. *Forma polar de un número complejo*
5. *Producto de dos números complejos en forma polar*
6. *Inverso de un complejo. Cociente de números complejos*
7. *El grupo de los complejos unimodulares*
8. *Interpretación geométrica del producto de complejos*
9. *Potenciación de complejos. Fórmula de Moivre*
10. *Raíces enésimas de un complejo*
11. *Raíces enésimas de la unidad*

1.4. Ejercicios y problemas de recapitulación

1.5. Autoevaluación A-1

1.1

Producto escalar

1. PROYECCIONES

Consideremos en el plano una recta r orientada. Esto quiere decir que se ha elegido sobre ella un vector —uno de los vectores de dirección— y, por tanto, queda fijado un sentido sobre la misma. En la figura 1.1 el sentido positivo es de O hacia U.

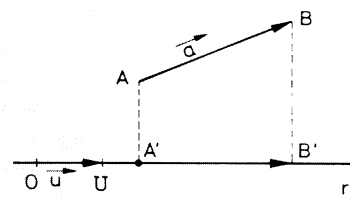


FIG. 1.1.

Si $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ es un vector del plano, designaremos por a o por $|\overrightarrow{AB}|$ el módulo de dicho vector, esto es, la longitud del segmento AB.

Si por los puntos A y B se trazan perpendiculares a la recta r, los pies de las mismas, A' y B', determinan un vector $\overrightarrow{A'B'}$ que se llama *proyección del vector* $\overrightarrow{AB}$ *sobre la recta* r.

En la figura 1.2 se han representado los diferentes vectores-proyección sobre r, de vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ..., etc., todos ellos de igual módulo. Se observa que los módulos de los vectores-proyección dependen del ángulo φ que forma cada vector con la recta r. También depende de este ángulo el que el sentido del vector-proyección sea el mismo o contrario que el fijado en r.

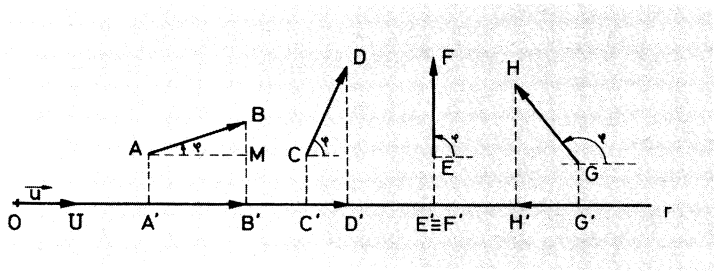


FIG. 1.2.

Si $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{OU}$ es el vector unitario (de módulo uno) de la recta r, el vector $\overrightarrow{A'B'}$, de la misma dirección y sentido que $\boldsymbol{u}$, se expresa así:

$$\overrightarrow{A'B'}=(\text{módulo de } \overrightarrow{A'B'})\times \boldsymbol{u}$$

y el módulo de $\overrightarrow{A'B'}$ es

$$|\overrightarrow{A'B'}|=\text{longitud del segmento } AM.$$

Como AMB es un triángulo rectángulo en M, recordando la definición de coseno del ángulo φ se puede escribir:

$$|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi \quad \text{y} \quad \overrightarrow{A'B'}=(|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\varphi)\cdot\boldsymbol{u}$$

La relación obtenida vale también para los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ de la figura 1.2. En el caso del vector $\overrightarrow{EF}$, la proyección es el vector nulo, lo que concuerda con ser $\cos 90°=0$. Para el vector $\overrightarrow{GH}$, adviértase que al ser los módulos de los vectores números siempre positivos o nulos, el primer miembro será positivo, mientras que el segundo, debido a la presencia de $\cos\varphi$ ($90°<\varphi<270°$) es negativo. Por tanto, para este caso debemos escribir

$$|\overrightarrow{G'H'}|=-|\overrightarrow{GH}|\cdot\cos\varphi$$

Ahora bien, como el vector $\overrightarrow{G'H'}$ resulta de *sentido contrario* al vector $\boldsymbol{u}$, la expresión del mismo es

$$\overrightarrow{G'H'}=-(\text{módulo de } \overrightarrow{G'H'})\times\boldsymbol{u}$$

es decir,

$$\overrightarrow{G'H'}=-(-|\overrightarrow{GH}|\cos\varphi)\cdot\boldsymbol{u}=(|\overrightarrow{GH}|\cdot\cos\varphi)\cdot\boldsymbol{u}$$

obteniéndose la misma expresión que para el vector proyección $\overrightarrow{A'B'}$. El hecho de que el vector proyección sea del mismo o distinto sentido que $\boldsymbol{u}$ ya va incluido en el factor $\cos\varphi$ que aparece en la expresión obtenida. Se puede enunciar:

La proyección sobre una recta orientada r, de vector unitario $\boldsymbol{u}$, de un vector $\overrightarrow{AB}$ que forma con ella un ángulo φ es:

$$\overrightarrow{A'B'} = \text{proy}\,(\overrightarrow{AB}) = (|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi)\cdot\boldsymbol{u}$$

Si se consideran ahora vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, y su suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, es inmediato comprobar (Fig. 1.3) que la proyección de $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ sobre r es igual a la suma de las proyecciones respectivas de $\boldsymbol{a}$ y de $\boldsymbol{b}$. Esto es cierto para cualquier número de sumandos, y será un resultado del que haremos frecuente uso.

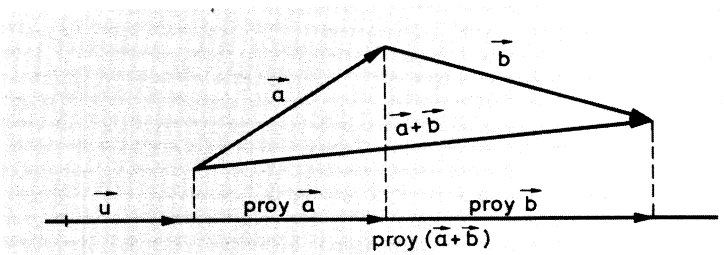


FIG. 1.3.

Ejercicio 1

La proyección de un vector $\boldsymbol{a}$, sobre la recta r es un vector de módulo mitad del módulo de $\boldsymbol{a}$. ¿Qué posibles ángulos forma $\boldsymbol{a}$ con la recta r?

Ejercicio 2

Un vector determina de forma única su proyección sobre una recta r. ¿Es cierta la proposición recíproca? Razónese.

Ejercicio 3

¿Existe algún vector $\boldsymbol{a}$ en el plano, cuya proyección sobre una recta r sea un vector de módulo doble que el de $\boldsymbol{a}$?

Ejercicio 4

Se toman en el plano cuatro puntos arbitrarios A, B, C y D. Sea r una recta orientada y denotemos por proy $\overrightarrow{AB}$ *la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre r. Calcular*

$$\text{proy}\,\overrightarrow{AB} + \text{proy}\,\overrightarrow{BC} + \text{proy}\,\overrightarrow{CD} + \text{proy}\,\overrightarrow{DA}.$$

2. PRODUCTO ESCALAR

Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, se llama producto escalar de ambos al número real

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \varphi$$

Es decir:

> El producto escalar de dos vectores es igual al producto de los módulos de ambos por el coseno del ángulo que forman.

El producto escalar de los dos vectores representados en la figura 1.4 es

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot (1/2) = 1$$

En cambio, los vectores $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ tienen por producto escalar:

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot (-1/2) = -1$$

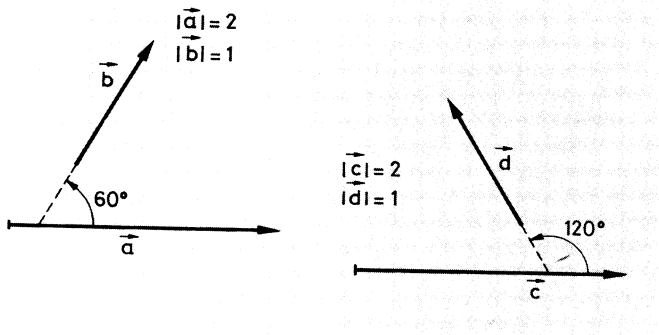


FIG. 1.4.

Si dos vectores son de direcciones perpendiculares, $\varphi = 90^\circ$ y $\cos \varphi = 0$, por lo que el producto escalar de ambos será nulo.

Si el vector $\boldsymbol{b}$ es unitario, $|\boldsymbol{b}| = 1$, y el producto escalar de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ será

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot 1 \cdot \cos \varphi = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi$$

que, salvo el signo, es el módulo de la proyección de $\boldsymbol{a}$ sobre la recta de vector unitario $\boldsymbol{b}$.

Si se multiplica escalarmente $\boldsymbol{a}$ por sí mismo, se obtiene:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos 0^\circ=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|^2$$

Luego:

> El producto escalar de un vector por sí mismo es el cuadrado de su módulo.

Ejercicio 5

Si r es una recta orientada de vector unitario $\boldsymbol{u}$, *y* $\boldsymbol{a}$ *un vector cualquiera, demuéstrese que*

$$\text{proy}\ \boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}.$$

Ejercicio 6

Analícese si el producto escalar es una ley interna.

3. PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

La primera propiedad del producto escalar que resulta de la definición es la *conmutativa,* es decir, para cualesquiera vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

La demostración resulta inmediata sin más que observar que

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

mientras que

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}|\ |\boldsymbol{a}|\cos(-\varphi)$$

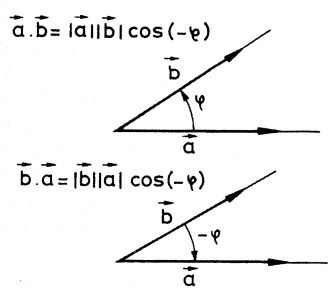


FIG. 1.5.

ya que el ángulo formado por $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}$, en este orden, es opuesto al formado por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Como $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ se obtiene el mismo resultado.

Una segunda propiedad es la *distributiva* del producto escalar respecto de la suma de vectores. La enunciamos así:

Para tres vectores cualesquiera $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ se verifica

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

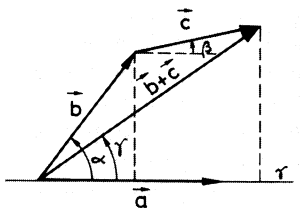


FIG. 1.6.

Para establecer este resultado, en la figura 1.6, sea r la recta que contiene al vector $\boldsymbol{a}$, y proyectemos sobre ella los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Como ya se ha visto anteriormente, la proyección del vector $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ es la suma de las proyecciones de $\boldsymbol{b}$ y de $\boldsymbol{c}$. Si llamamos $\boldsymbol{u}$ al vector unitario de la recta r se puede escribir:

$$\text{proy}\,\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\alpha)\cdot\boldsymbol{u};\qquad \text{proy}\,\boldsymbol{c}=(|\boldsymbol{c}|\cos\beta)\cdot\boldsymbol{u}$$

y

$$\text{proy}\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\gamma)\cdot\boldsymbol{u}$$

De lo anterior se deduce que

$$|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\gamma=|\boldsymbol{b}|\cos\alpha+|\boldsymbol{c}|\cos\beta$$

de forma que si se multiplican los dos miembros de esta igualdad por $|\boldsymbol{a}|$ queda

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\alpha+|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\beta$$

El primer miembro es el producto escalar de $\boldsymbol{a}$ y $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, mientras que los sumandos del segundo miembro son $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, de donde se deduce el resultado que queríamos demostrar.

La última propiedad que interesa demostrar es la siguiente:

Si m es un número real,

$$(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

Ejercicio 7

Demuéstrese esta propiedad del producto escalar.

Recojamos las tres propiedades fundamentales antes apuntadas:

I. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, \quad \forall\, \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathfrak{V}_2$

II. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}, \quad \forall\, \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathfrak{V}_2$

III. $(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}), \quad \forall\, \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathfrak{V}_2; \quad \forall\, m\in\mathbb{R}$

A estas tres propiedades se suelen añadir otras dos:

IV. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0$

V. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0 \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

Estas últimas propiedades expresan que el producto escalar de un vector por sí mismo ha de ser un número positivo o nulo, lo que es consecuencia de que en este caso se obtiene el cuadrado del módulo del vector $\boldsymbol{a}$, y un cuadrado no puede ser negativo, y sólo es cero si el módulo del vector es cero, es decir, es el vector nulo, y recíprocamente.

4. VECTORES ORTONORMALES. BASE ORTONORMAL

Como ya se ha indicado en el ejemplo 2, el producto escalar de dos vectores ortonormales es nulo. Si llamamos ortonormales a dos vectores cuyo producto escalar sea nulo, habremos de convenir que el vector nulo es ortogonal a todos los vectores de $\mathfrak{V}_2$.

Proposición:

Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no nulos tales que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$. Entonces $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ es una base de $\mathfrak{V}_2$.

Demostración: Como dos vectores cualesquiera de $\mathfrak{V}_2$, con tal de que sean linealmente independientes, forman una base del espacio vectorial, bastará comprobar la independencia lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ para asegurar que forman base.

Si existiera una combinación lineal de la forma

$$p\boldsymbol{u}+q\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}, \qquad p,q\in\mathfrak{R}$$

multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{u}$ cada uno de los miembros resulta:

$$\boldsymbol{u}\cdot(p\boldsymbol{u}+q\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{0}=0$$

es decir,

$$p(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})+q(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=0.$$

Como por hipótesis $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$,

$$p(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})=0$$

y como $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\neq 0$, por lo que tiene que ser $p=0$. Haciendo el mismo proceso, pero multiplicando por $\boldsymbol{v}$ en lugar de por $\boldsymbol{u}$, se llega a que también $q=0$. Esto demuestra la independencia lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

En particular, dos vectores *unitarios y ortonormales* forman una base.

En efecto, al ser unitarios, es decir, de módulo 1, no son nulos, y son ortornormales por hipótesis.

Definición:

> Dos vectores unitarios y ortogonales se llaman ortonormales y la base que forman se llama ortonormal.

5. EXPRESION DEL PRODUCTO ESCALAR EN UNA BASE ORTONORMAL

Sea $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ una base ortonormal. Según definición de la misma, se verifican las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1\\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0\end{array}\right\} \qquad [\mathrm{I}]$$

Las dos primeras igualdades indican que los vectores $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ son unitarios. La última expresa la ortogonalidad de los mismos.

Sean ahora $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ dos vectores cualesquiera. Entonces se puede escribir

$$\begin{array}{ll}\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j} & x_1, x_2\in\mathbb{R}\\ \boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j} & y_1, y_2\in\mathbb{R}\end{array}$$

es decir, (x_1, x_2) son las componentes del vector $\boldsymbol{x}$ en la base $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$, y análogamente, (y_1, y_2) lo son de $\boldsymbol{y}$.

El producto escalar de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j})\cdot(y_1\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=x_1y_1(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+\\ +x_2y_1(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+x_2y_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})\end{aligned} \qquad [\mathrm{II}]$$

y teniendo en cuenta las relaciones [I] queda finalmente

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2$$

En lo que sigue, y mientras no se advierta lo contrario, cuando se dé un vector por sus componentes en una cierta base, se supondrá que la misma

es ortonormal. El producto de dos vectores podrá calcularse, por tanto, empleando la simple expresión anterior.

Ejemplo 4

El producto escalar de los vectores $\boldsymbol{x}=(1, 2)$, $\boldsymbol{y}=(-3, 4)$ vale:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=1\cdot(-3)+2\cdot 4=5$$

Ejemplo 5

Los dos vectores $\boldsymbol{x}=(2, 1)$, $\boldsymbol{y}=(4, -8)$, tienen por producto escalar

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=2\cdot 4+1\cdot(-8)=$$

y son, por tanto, ortogonales.

Ejemplo 6

Puesto que el producto escalar de un vector por sí mismo es el cuadrado de su módulo, se tiene para el vector $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$:

$$|\boldsymbol{x}|^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2, \quad \text{de donde} \quad |\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

Así, el módulo del vector (3,4) es

$$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$$

Ejercicio 8

Calcúlense los siguientes productos escalares:

a) $(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})\cdot(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$; *b)* $(3, -5)\cdot(2, 6)$; *c)* $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\cdot(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$.

Ejercicio 9

Hállense los módulos de cada uno de los vectores del ejercicio 8.

Ejercicio 10

Demuéstrese que si $\boldsymbol{x}$ *es un vector no nulo, el vector*

$$\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$$

es un vector unitario. Este proceso se sigue cuando se quiere obtener un vector unitario a partir de uno dado, con la misma dirección y sentido.

Ejercicio 11

Hállese el valor que debe darse a m para que los vectores $(m, 3)$ *y* $(2m, -1)$ *sean ortogonales.*

6. ANGULO DE DOS VECTORES

Si de la expresión que define el producto escalar de dos vectores $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{y}| \cos \varphi$$

se despeja $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{y}|}$$

y se sustituye $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ por su expresión obtenida en términos de las componentes de ambos vectores

$$x_1y_1 + x_2y_2$$

y cada uno de los módulos de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ por su valor calculado como en el ejemplo 7, resulta

$$\cos \varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Esta expresión permite determinar el ángulo que forman dos vectores en función de las componentes de los mismos en una base ortonormal.

Ejemplo 8

El ángulo que forman los vectores $(\sqrt{3}, 1)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$ se determina así

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Sin necesidad de tablas trigonométricas se concluye que $\varphi = 120°$.

Ejemplo 9

El ángulo determinado por los vectores $(2, -1)$ y $(1, 3)$ viene dado así:

$$\cos\varphi = \frac{2-3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -0{,}1414\ldots$$

con lo que el ángulo es $\varphi = 98° 7' 48''$. En este caso se ha hecho preciso el uso de una calculadora o unas tablas de funciones trigonométricas.

Ejercicio 12

Hállense los ángulos que forman las siguientes parejas de vectores

a) $(2, 3)$ y $(-2, -3)$;

b) $(2-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+1)$ y $(2, 1)$;

c) $(m, 1)$ y $(1, m)$ en función de m;

d) $(3, -7)$ y $(2, -3)$.

7. INTERPRETACION DE LAS COMPONENTES DE UN VECTOR

Cuando en el espacio vectorial, sea $\mathcal{V}_2$ o $\mathcal{V}_3$, se elige una base ortonormal, cada vector viene determinado por sus componentes, dos en $\mathcal{V}_2$ y tres en $\mathcal{V}_3$. Situémonos por un momento en $\mathcal{V}_3$ (el proceso que vamos a seguir se hace igual en $\mathcal{V}_2$) y sea $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base ortonormal, y $\boldsymbol{x}$ un vector de componentes (x_1, x_2, x_3).

Entonces,

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}.$$

Calculemos los productos escalares de $\boldsymbol{x}$ por cada uno de los vectores de la base. Habida cuenta de que por ser ésta ortonormal los productos de vectores de la base obedecen al esquema

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1; \qquad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$$

resulta

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{i} = x_1$$
$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j} = x_2$$
$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{k} = x_3$$

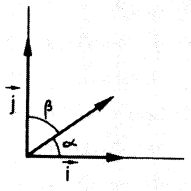
Enunciemos el resultado:

> Las componentes de un vector $\boldsymbol{x}$ en una base ortonormal son los productos escalares de $\boldsymbol{x}$ por cada uno de los vectores de la base considerada.

Ejemplo 10

Considérese el vector unitario $\boldsymbol{x}$ de la figura 1.7. Si a y b son sus componentes en la base $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, se tiene

$$a = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \cos \alpha$$
$$b = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \beta = \cos \beta$$



Pero como $\beta = 90° - \alpha$, resulta en definitiva

$$b = \cos (90° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

FIG. 1.7.

Las componentes de un vector unitario $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_2$, que forma un ángulo α con el vector $\boldsymbol{i}$ de una base ortornormal son

$$(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.1

1. El coseno del ángulo debe ser, en valor absoluto, 1/2. Luego $\cos \varphi = \pm 1/2$, es decir, $\varphi = 60°$, ó $120°$, ó $240°$ ó $300°$.

2. No. Un contraejemplo lo constituyen los dos vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de la figura adjunta, que tienen la misma proyección sobre r, siendo $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$.

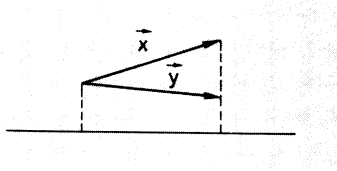


FIG. 1.8.

3. Si se excluye que el vector sea nulo, no puede existir.

4. **0.**

5. Puesto que, por definición, $\operatorname{proy} \boldsymbol{a} = (|\boldsymbol{a}| \cos \varphi)\boldsymbol{u}$, y

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{u}| \cos \varphi = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi$$

por ser $|\boldsymbol{u}| = 1$, sustituyendo en la primera relación se obtiene $\operatorname{proy} \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$, c. q. d.

6. Obviamente no, pues el producto de dos vectores es un escalar, y no otro vector.

7. Si m es mayor o igual que cero, $|m\boldsymbol{a}| = m|\boldsymbol{a}|$. En este caso,

$$(m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = |m\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo entre $m\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Pero como multiplicar por $m \geqslant 0$ a un vector $\boldsymbol{a}$ no altera su dirección *ni su sentido,* este ángulo es el mismo que forman $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Luego

$$(m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = |m\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos \varphi = m|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos \varphi = m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

Si $m < 0$, el vector $m\boldsymbol{a}$ es de la misma dirección pero de sentido opuesto a $\boldsymbol{a}$. El ángulo que forman ahora $m\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no es el mismo que forman $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, sino éste aumentado en 180°. Por tanto, y teniendo en cuenta que cuando $m < 0$ se tiene $|m\boldsymbol{a}| = -m|\boldsymbol{a}|$, resulta:

$$(m\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = |m\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos \varphi = -m|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos (\varphi - 180°) =$$
$$= -m|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ (-\cos \varphi) = m|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos \varphi = m(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

8. *a)* -1; *b)* -24; *c)* 0. Los vectores son ortogonales.

9. *a)* $\sqrt{10}$ y $\sqrt{5}$; *b)* $\sqrt{34}$ y $\sqrt{40}$; *c)* $\sqrt{5}$ los dos.

10. Basta multiplicarlo escalarmente por sí mismo para comprobar que su módulo es 1.

11. $m = \pm \sqrt{3/2}$.

12. *a)* 180°; *b)* 60°; *c)* $\cos \varphi = \dfrac{2m}{m^2 + 1}$; *d)* 10° 29′ 29″.

1.2

Trigonometría plana

1. INTRODUCCION

En el curso anterior se estudiaron las razones trigonométricas de un ángulo, así como las funciones trigonométricas, con sus propiedades más importantes. Recordemos que para cualquier ángulo α, están definidos el seno de α, el coseno de α y la tangente de α. Como se recordará, la cosecante, la secante y la cotangente son los valores inversos del seno, coseno y tangente, respectivamente.

Las relaciones fundamentales entonces establecidas fueron

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Para continuar desarrollando la trigonometría se precisa deducir las fórmulas que dan las razones goniométricas del ángulo suma y del ángulo diferencia de otros dos, en función de las de éstos.

2. COSENO DE LA DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

Considérense los vectores unitarios $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ referidos a la base ortonormal $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ de la figura1.9.

Según se vio en el ejemplo 10, las componentes del vector $\boldsymbol{x}$ son

$$(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

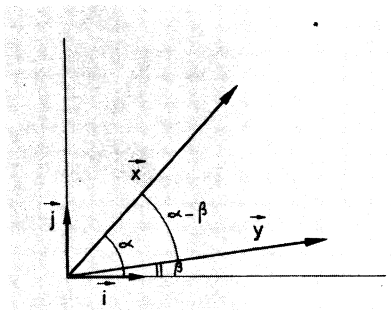


FIG. 1.9.

y las del vector $\mathbf{y}$

$$(\cos \beta,\ \operatorname{sen} \beta)$$

El producto escalar de $\boldsymbol{x}$ e $\mathbf{y}$ se puede calcular ahora inmediatamente, en función de sus componentes, y resulta ser

$$\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{y} = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

Por otra parte, el ángulo formado por $\boldsymbol{x}$ e $\mathbf{y}$ es $\alpha - \beta$, de modo que según la definición de producto escalar:

$$\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{y} = |\boldsymbol{x}|\ |\mathbf{y}| \cos (\alpha - \beta)$$

y como los dos vectores $\boldsymbol{x}$ e $\mathbf{y}$ son unitarios, queda en definitiva

$$\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{y} = \cos (\alpha - \beta)$$

Igualando las dos expresiones del producto escalar se obtiene la importante identidad:

$$\boxed{\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \qquad [1]$$

Esta relación es verdadera cualesquiera que sean α y β. Con su ayuda podremos obtener relaciones semejantes para la suma de ángulos, así como la expresión del seno de una suma o de una diferencia.

3. COSENO DE UNA SUMA. SENO DE UNA SUMA Y DE UNA DIFERENCIA

Si en la igualdad [1] se sustituye β por $-\beta$, se obtiene:

$$\cos (\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos (-\beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (-\beta)$$

Como es sabido, $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$, por lo que, en definitiva, queda

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} \qquad [2]$$

Para deducir expresiones análogas de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ basta tener presente que, para cualquier ángulo φ

$$\operatorname{sen}\varphi=\cos(90^\circ-\varphi)$$

con lo que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos(90^\circ-(\alpha+\beta))=\cos((90^\circ-\alpha)-\beta)$$

y aplicando la expresión que da el coseno de una diferencia

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)\operatorname{sen}\beta=$$
$$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

puesto que

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha.$$

Recojamos el resultado

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} \qquad [3]$$

Si en la expresión obtenida se sustituye β por $-\beta$, resulta

$$\operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

y utilizando el hecho, ya mencionado, de que $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$, se obtiene

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} \qquad [4]$$

Las expresiones anteriores pueden utilizarse para obtener las razones trigonométricas del ángulo de 15°, puesto que conocemos las de 45° y 30°. Así,

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\operatorname{sen}45^\circ\operatorname{sen}30^\circ$$

Como $\cos 45^\circ=\operatorname{sen}45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}30^\circ=\dfrac{1}{2}$ resulta:

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Ejercicio 13

Obténgase el seno y el coseno del ángulo de $105°$.

Ejercicio 14

Un ángulo α, *situado en el primer cuadrante, es tal que* $\operatorname{sen}\alpha = 1/3$. *El coseno de un ángulo* β *del tercer cuadrante vale* $-2/5$. *Hállese el seno y el coseno del ángulo* $\alpha + \beta$.

Ejercicio 15

Calcular, sin ayuda de tablas trigonométricas ni de calculadora, el valor de las expresiones

$$\cos 48° \cos 18° + \operatorname{sen} 48° \operatorname{sen} 18°$$
$$\operatorname{sen} 22° \cos 23° + \operatorname{sen} 23° \cos 22°$$

4. TANGENTE DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

Conocidos el seno y el coseno de la suma de dos ángulos, el cociente entre ambos nos dará la tangente de dicha suma. Conviene no obstante transformar la expresión resultante para llegar a una en la que sólo intervengan las tangentes de los sumandos.

Partimos de la relación

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Siempre que ninguno de los dos valores $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ sea cero (lo que supondría que la tangente del ángulo correspondiente no estuviera definida) se puede dividir numerador y denominador de la fracción anterior por $\cos\alpha\cos\beta$ y se obtiene

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}} \qquad [5]$$

Cambiando β por $-\beta$ y teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$, se llega a

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \qquad [6]$$

Ejercicio 16

Partiendo de las inversas de las fórmulas [5] *y* [6] *determínense* $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ *y* $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, *en función de* $\operatorname{ctg}\alpha$ *y de* $\operatorname{ctg}\beta$.

Ejercicio 17

Calcúlese, sin necesidad de usar tablas, el cateto mayor de un triángulo rectángulo cuyo ángulo agudo mayor mide $75°$ *y el cateto adyacente* $\sqrt{2}$ *metros.*

5. RAZONES GONIOMETRICAS DEL ANGULO DOBLE Y DEL ANGULO MITAD

Si en la expresión [3] se sustituye β por α, resulta

$$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

Es decir,

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \qquad [7]$$

Ejercicio 18

De manera análoga, dedúzcase la relación

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad [8]$$

Ejercicio 19

Calcúlense sin tablas el seno y el coseno de $120°$ *a partir de las razones goniométricas de* $60°$.

Ejercicio 20

Partiendo de la fórmula [5], *dedúzcase la* $\operatorname{tg} 2\alpha$, *en función de* $\operatorname{tg}\alpha$.

Ejercicio 21

Se tiene el dato $\operatorname{sen}\varphi = 3/5$. *Determínense* $\cos 2\varphi$ *y* $\operatorname{tg} 2\varphi$, *sabiendo que* $0 < \varphi < \pi/2$.

Ejemplo 12

Con frecuencia han de calcularse expresiones como

$$\text{tg } 2 (\text{arc tg } 1/5).$$

Obsérvese lo que ha de hacerse: si se llama $x = \text{arc tg } 1/5$, entonces $\text{tg } x = 1/5$, y lo que se pretende obtener es $\text{tg } 2x$. Así, pues,

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot (1/5)}{1 - (1/5)^2} = \frac{5}{12}$$

Se ha calculado $\text{tg } 2 (\text{arc tg } 1/5) = 5/12$.

Ejercicio 22

Calcúlense los valores de las siguientes expresiones:

a) cos 2 (arc cos 1/3);

b) sen 2 (arc cos 1/5);

c) tg 2 (arc sen 2/7).

Si se escribe la relación fundamental de la goniometría usando el ángulo $A/2$, se tiene

$$1 = \cos^2 A/2 + \text{sen}^2 A/2 \qquad [9]$$

Si en la igualdad [8] se sustituye $2\alpha = A$, resulta

$$\cos A = \cos^2 A/2 - \text{sen}^2 A/2 \qquad [10]$$

Al restar miembro a miembro las expresiones [9] y [10] queda

$$1 - \cos A = 2 \text{ sen}^2 A/2$$

$$\text{sen}^2 A/2 = \frac{1 - \cos A}{2}$$

$$\boxed{\text{sen } A/2 = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}} \qquad [11]$$

Ejercicio 23

Manejando de manera análoga las expresiones [9] *y* [10] *justifíquese la fórmula*

$$\boxed{\cos A/2 = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}} \qquad [12]$$

Ejercicio 24

Dedúzcase a partir de [11] *y* [12] *una expresión para* tg $A/2$, *en función de coseno de A.*

Ejercicio 25

Calcúlense las razones goniométricas del ángulo de $22° 30'$, *sin necesidad de consultar tablas ni usar calculadora.*

Ejercicio 26

Hállense las razones goniométricas del ángulo de $15°$, *sin usar tablas ni calculadora.*

Ejercicio 27

Calcular sen $3x$, *si* sen $x = 0{,}6$. *(Sugerencia:* $3x = 2x + x$.*)*

Ejercicio 28

Resolver las ecuaciones:

a) $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$;

b) $\operatorname{sen} 2x = \cos x$;

c) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0{,}5$.

En cálculo integral, cuyo principio se inicia en la unidad 4 de este libro, son muy útiles las fórmulas que dan sen x, cos x y tg x, en función racional de tg $x/2$.

Si se escribe $\operatorname{tg} x/2 = t$, usando la fórmula deducida en el ejercicio 20, que da tg 2α en función de tg α, resulta, aquí, para los ángulos x y $x/2$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} (x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2 (x/2)} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Ejercicio 29

Dedúzcanse cos x *y* sen x *en función de* $t = \operatorname{tg} x/2$.

Recogiendo los resultados del ejemplo 13 y del ejercicio 29, recuadramos:

$$\operatorname{tg} x/2 = t$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Ejercicio 30

Exprésense como funciones racionales de $t = \operatorname{tg} \alpha/2$ *las expresiones:*

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$; *b)* $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$;

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \cos x}$; *d)* $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$.

6. FORMULAS DE TRANSFORMACION EN PRODUCTO

Cuando aún no se utilizaban las calculadoras, para poder resolver problemas trigonométricos por medio de las tablas de logaritmos resultaba imprescindible conseguir transformar las sumas (restas) de las razones goniométricas de los ángulos en productos sobre los que se podía ya realizar el cálculo logarítmico. Hoy con la potencia, rapidez y seguridad de cálculo de las máquinas no es necesario, a nivel profesional, hacer esa transformación. Sin embargo, resulta en extremo formativo acercarse a ver cómo el ingenio humano ha sido capaz de vencer este tipo de dificultades.

Se trata de transformar en productos estas expresiones:

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B$$
$$\cos A \pm \cos B$$

Para ello aprovechamos las fórmulas [3] y [4], haciendo

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= A \\ \alpha - \beta &= B \end{aligned}\right\} \qquad [13]$$

Y consecuentemente, para cuando hagan falta,

sumando las [13]:

$$2\alpha = A + B \implies \alpha = \frac{A + B}{2}$$

restando las [13]:

$$2\beta = A - B \implies \beta = \frac{A - B}{2}$$

Ahora, sumemos (restemos) las [3] y [4],

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

que en función de A y B toman la forma:

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \text{ sen } \frac{A-B}{2} \qquad [14]$$

Ejercicio 31

De manera análoga y partiendo de las expresiones [2] *y* [1] *justifíquense estas fórmulas:*

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \text{ sen } \frac{A+B}{2} \text{ sen } \frac{A-B}{2} \qquad [15]$$

Ejercicio 32

Transfórmese en producto $1 + \cos x$ *(sugerencia: considérese* 1 *como coseno de un ángulo).*

Ejercicio 33

Calcúlese $\text{sen } 75° - \text{sen } 15°$.

Ejercicio 34

Resuélvanse las ecuaciones

a) $2 \cos x + 2 \text{ sen } x = \sqrt{2}$;

b) $\cos 2x + \cos x = 0$;

c) $\text{sen } 3x = \text{sen } x - \text{sen } 2x$;

d) $\text{sen } 3x - \cos x = -\text{sen } x$.

Ejercicio 35

Resuélvanse los sistemas

a) $x + y = 120°$,
$\text{sen } x - \text{sen } y = 1/2$;

b) $\text{sen } x + \text{sen } y = 1$,
$2x + 2y = \pi$;

c) $\text{sen } x + \text{sen } y = 1$,
$\cos x + \cos y = \sqrt{3}$.

7. TRIGONOMETRIA PLANA

7.1. Teorema de los senos

El curso pasado, además de la trigonometría del triángulo rectángulo, se llegó a establecer el llamado teorema de los senos, cuya expresión matemática es:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \qquad [16]$$

para todo triángulo ABC, siendo R el radio de su círculo circunscrito.

Ejemplo 14

Resolver un triángulo es determinar sus lados, ángulos y área, usando los datos de que se disponga. Con el teorema de los senos se pueden abordar problemas como el que se propone en la figura 1.10.

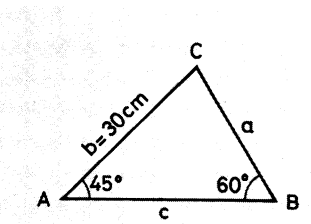


FIG. 1.10.

El cálculo de $\widehat{C}$ es inmediato

$$\widehat{C} = 180 - (60 + 45) = 75°$$

Usando la relación [16],

$$a = \frac{b \cdot \operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 60°} = 10\sqrt{6} \text{ cm}$$

y también

$$c = \frac{b \cdot \operatorname{sen} 75°}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

Como se calculó en el ejercicio 17, $\operatorname{sen} 75 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$. Así,

$$c = 5\sqrt{2}(\sqrt{3} + 3) \text{ cm}$$

Finalmente, su área

$$S = 1/2\, a \cdot c \cdot \operatorname{sen} B = 1/2\, 10\sqrt{6} \cdot 30 \cdot \sqrt{3}/2 = 225\sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

Ejercicio 36

Constrúyase con regla y compás un triángulo ABC, siendo

$$A = 35°, \quad b = 12\ \text{cm}, \quad a = 9\ \text{cm}$$

Ejercicio 37

Resuélvase el triángulo cuyos datos aparecen en la figura 1.11.

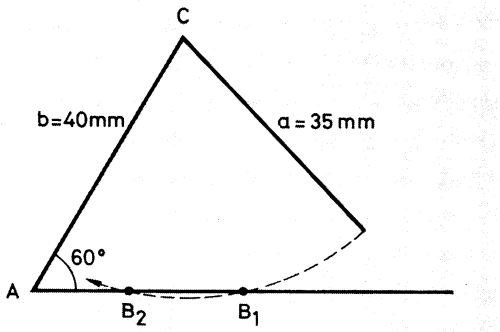


FIG. 1.11.

7.2. Teorema del coseno

Otro teorema útil para resolver triángulos es el llamado teorema del coseno.

En el triángulo de la figura 1.12, se tiene:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB};$$
$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

siendo a, b y c los módulos respectivos de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

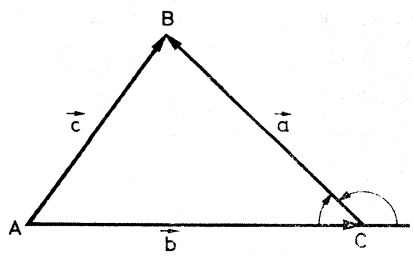


FIG. 1.12.

Como el módulo de un vector coincide con el producto escalar de él por sí mismo,

$$c^2 = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}$$

y, puesto que

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

$$c^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = a^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + b^2$$

Siendo el ángulo de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ el suplementario del ángulo C del triángulo,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos (180^\circ - C) = a \cdot b \, (-\cos C) = -ab \cos C$$

y sustituyendo:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C} \qquad [17]$$

La expresión recuadrada constituye el «teorema del coseno», que dice: en *todo* triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman.

Ejemplo 15

Resuélvase el triángulo cuyos datos son:

$$b = 10 \text{ cm},$$
$$c = 5 \text{ cm},$$
$$A = 60^\circ.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$a^2 = 100 + 25 - 100 \cdot 1/2 = 75$$
$$a = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \implies \operatorname{sen} \widehat{B} = b/a \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{10}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \implies \widehat{B} = 90^\circ$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - (60 + 90) = 30^\circ$$

$$S = 1/2 b \cdot c \operatorname{sen} A = 1/2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Ejercicio 38

Resuélvase el triángulo cuyos datos son

$$a = 15 \text{ cm}$$
$$b = 10 \text{ cm}$$
$$\widehat{C} = 35°$$

7.3. Teorema de las tangentes

Se puede conseguir una curiosa fórmula que, a veces, es interesante utilizar para la resolución de triángulos. Es la que se recuadra con el número [18]:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}} \qquad [18]$$

Ejercicio 39

A partir del teorema del seno y utilizando luego las fórmulas de transformación en producto, dedúzcase la igualdad [18].

Ejemplo 16

La resolución del triángulo propuesto en el ejemplo 15 puede abordarse usando el teorema de las tangentes, de la siguiente manera:

$$A+B+C=180 \implies B+C=180-A=180-60=120 \implies \frac{B+C}{2}=60°$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cdot \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{10-5}{10+5} \operatorname{tg} 60° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{B-C}{2} = 30°$$

Entonces

$$\left.\begin{matrix} B+C=120° \\ B-C=\ 60° \end{matrix}\right\} \implies \begin{cases} B=90° \\ C=30° \end{cases}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \implies a = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{1} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$S = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Ejercicio 40

Resuélvase, usando el teorema de las tangentes, el triángulo propuesto en el ejercicio 38.

Ejercicio 41

De un cuadrilátero ABCD se conocen las dos diagonales AC y BD, que miden, respectivamente, 6 y 5 metros, y los lados AB = 2,7 m y AD = BC = 4 m. Hállense el cuarto lado y los ángulos del cuadrilátero.

Ejercicio 42

A una distancia de 50 m del pie de una torre de 65 m de altura, ésta se ve bajo un ángulo de 68°. Calcúlese el desnivel entre el punto de observación y el pie de la torre.

7.4. Fórmulas de Briggs

Finalmente, dejemos registradas las llamadas fórmulas de Briggs, que permiten, conociendo los tres lados de un triángulo, hallar sus ángulos y, por tanto, resolverlo.

Su deducción es elemental aunque un poco laboriosa, por lo que la omitimos.

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\;;\qquad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\;;\qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad [19]$$

En las fórmulas [19], p es el semiperímetro, o sea, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

7.5. Distintas formas del área de un triángulo

Como se sabe, la fórmula básica del área del triángulo es (Fig. 1.13):

$$S=1/2\cdot b\cdot h \qquad [20]$$

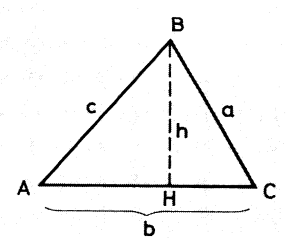


FIG. 1.13.

Ejercicio 43

Dedúzcase sobre la figura 1.13 la fórmula del área del triángulo que se recuadra.

$$S = 1/2\, ab \operatorname{sen} C \qquad [21]$$

Ejercicio 44

Despejando sen C *del teorema de los senos y sustituyéndolo en* [21], *justifíquese la fórmula* [22] *para el área de un triángulo.*

$$S = \frac{abc}{4R} \qquad [22]$$

Ejercicio 45

Utilizando la figura 1.14, razónese que el área de un triángulo en función de su semiperímetro y el radio de su círculo inscrito es:

$$S = p \cdot r \qquad [23]$$

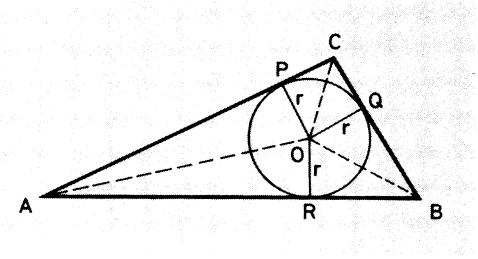


FIG. 1.14.

Ejercicio 46

A partir de la fórmula [21], *sustituyendo* sen C *por su valor en función del ángulo mitad,* $C/2$; *y luego, usando los valores de* sen $C/2$ *y* cos $C/2$, *dados por las fórmulas de Briggs, justifíquese la llamada fórmula de Harón, para el área de un triángulo, que es la que se recuadra con el número* [24].

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad [24]$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.2

13. $\operatorname{sen} 105 = \operatorname{sen}(60+45) = \operatorname{sen} 60 \cos 45 + \cos 60 \operatorname{sen} 45 =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$\cos 105 = \cos(60+45) = \cos 60 \cos 45 - \operatorname{sen} 60 \operatorname{sen} 45 =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}).$$

14. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = -\frac{2}{15} - \frac{2\sqrt{42}}{15}$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta =$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{15} + \frac{\sqrt{21}}{15}.$$

15. $\cos 48 \cos 18 + \operatorname{sen} 48 \operatorname{sen} 18 = \cos(48-18) = \cos 30 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen} 22 \cos 23 + \operatorname{sen} 23 \cos 22 = \operatorname{sen}(22+23) = \operatorname{sen} 45 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

16. $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$

$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}.$

17.

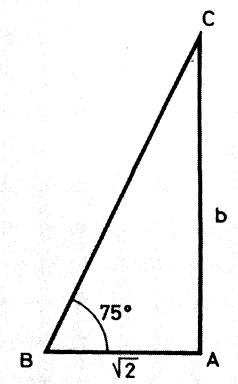


FIG. 1.15.

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} 75 = \operatorname{tg}(30+45) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{2}\,(2+\sqrt{3})\ \text{m}.$$

18. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$

19. $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 2\cdot 60^\circ = 2\operatorname{sen} 60^\circ\cos 60^\circ = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 120^\circ = \cos 2\cdot 60^\circ = \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

20. $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$

21. $\operatorname{sen}\varphi = \frac{3}{5} \Longrightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5};$

$$\cos 2\varphi = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \Longrightarrow \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{24}{7}.$$

22. *a)* $-\frac{7}{9}$; *b)* $\pm\frac{4\sqrt{6}}{25}$; *c)* $\pm\frac{180}{123\sqrt{5}}$.

23. [9] + [10]: $1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} \Longrightarrow \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}.$

24. $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} : \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$

25. $\operatorname{sen} 22^\circ\,30' = \operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$\cos 22^\circ\,30' = \cos\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ\,30' = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

26. $\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}\dfrac{30^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\cos 15^\circ = \cos\dfrac{30^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{3}/2}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{7-4\sqrt{3}.}$

27. $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x+x) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x =$

$= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) =$

$= 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) =$

$= 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x =$

$= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x (3 - 4 \operatorname{sen}^2 x) =$

$= \dfrac{3}{5}\left(3 - 4 \cdot \dfrac{9}{25}\right) = \dfrac{117}{125} = 0{,}936.$

28. *a)* $6\cos^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 5$; $7\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 5$;

$8\cos^2 x = 6$; $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$; $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = 180^\circ K \pm 30^\circ = 30(6K \pm 1)$;

b) $2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x$; $2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$;

$\cos x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$;

$\cos x = 0 \Longrightarrow x = (2K+1) \cdot 90^\circ$

$2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \begin{cases} 360K + 30^\circ \\ 360K + 150^\circ \end{cases}$

c) $\operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 \Longrightarrow \operatorname{sen} 2x = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2x = 90^\circ + 360\ \mathrm{K} \Longrightarrow x = 45^\circ + 180\ \mathrm{K}.$

28. $\left.\begin{aligned} \cos x &= \cos^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} \\ 1 &= \cos^2\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} \end{aligned}\right\} : \Longrightarrow \cos x = \dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}}$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos^2\dfrac{x}{2}$ $(\cos x \neq 0)$, resulta:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}; \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen} x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

30. *a)* $$\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1+t^2-(1-t^2)}{1+t^2}}=\frac{2t}{2t^2}=\frac{1}{t};$$

b) $$\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x-\cos x}=\frac{2t+1-t^2}{2t-1+t^2};$$

c) $$\frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos x}=\frac{t(1+t^2)}{1-t^2};$$

d) $$\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}=\frac{-t^4+6t^2-1}{(t^2+1)^2}.$$

31. Sumando (restando) las [2] y [1], se obtiene:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\ 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos A+\cos B=\ 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

32. $$1+\cos x=\cos 0^\circ+\cos x=2\cos\frac{x+0}{2}\cos\frac{x-0}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}.$$

33. $$\operatorname{sen}75^\circ-\operatorname{sen}15^\circ=2\cos\frac{75+15}{2}\operatorname{sen}\frac{75-15}{2}=2\cos45^\circ\operatorname{sen}30^\circ=$$
$$=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

34. *a)* $2\cos x+2\operatorname{sen}x=\sqrt{2}$; $\cos x+\operatorname{sen}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos x+\cos(90-x)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2\cos\frac{x+90-x}{2}\cos\frac{x-90+x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2\cos45^\circ\cos(x-45)=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos(x-45)=\frac{1}{2};$$

$$\begin{cases} x-45=360\ \mathrm{K}+60^\circ \implies x=360\ \mathrm{K}+105^\circ \\ x-45=360\ \mathrm{K}+120^\circ \implies x=360\ \mathrm{K}+165^\circ \end{cases}$$

b) $\cos 2x + \cos x = 0$; $\quad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0$;

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 0$; $\quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \implies \begin{cases} x = 360\,\mathrm{K} + 60^\circ \\ x = 360\,\mathrm{K} + 120^\circ \end{cases} \\ \cos x = -1 \implies x = (2\,\mathrm{K}+1)\,180^\circ \end{cases}$$

c) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$;

$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x$;

$2\cos 2x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x$;

$2\cos 2x \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$;

$2\operatorname{sen} x\,(\cos 2x + \cos x) = 0$;

$$2\operatorname{sen} x = 0 \implies x = 180\,\mathrm{K}$$

$\cos 2x + \cos x = 0$;

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0$;

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 0$;

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

(véase ecuación anterior).

d) $\operatorname{sen} 3x - \cos x = -\operatorname{sen} x$; $\quad \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = \cos x$;

$2\operatorname{sen} 2x \cos x = \cos x$; $\quad 2\operatorname{sen} 2x \cos x - \cos x = 0$;

$\cos x\,(2\operatorname{sen} 2x - 1) = 0$; $\quad \cos x = 0 \implies x = (2\,\mathrm{K}+1)\,90^\circ$;

$2\operatorname{sen} 2x - 1 = 0$;

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \implies 2x = \begin{cases} 30^\circ + 360\,\mathrm{K}; & x = 15^\circ + 180\,\mathrm{K} \\ 150^\circ + 360\,\mathrm{K}; & x = 75^\circ + 180\,\mathrm{K} \end{cases}$$

35. *a)* $\left.\begin{array}{l} x + y = 120^\circ \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y = 120^\circ \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

$$2\cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \implies$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 30^\circ + 360\,\mathrm{K} \implies \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 60^\circ + 720\,\mathrm{K} \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} x = 90^\circ + 360\,\mathrm{K} \\ y = 30^\circ - 360\,\mathrm{K} \end{array} \\ \dfrac{x-y}{2} = 150^\circ + 360\,\mathrm{K} \implies \begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 300^\circ + 720\,\mathrm{K} \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} x = 210^\circ + 360\,\mathrm{K} \\ y = -90^\circ - 360\,\mathrm{K} \end{array} \end{cases}$$

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1$ $\quad \left\{ 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = 1 \right.$

$2x + 2y = \pi$ $\quad \left. x + y = \dfrac{\pi}{2} \right\}$

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} x - y = \dfrac{\pi}{2} + 4k\pi & x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} & y = 0 - 2k\pi \end{array} \right. \\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} x - y = \dfrac{7\pi}{2} + 4k\pi & x = 2\pi + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} & y = -\dfrac{3\pi}{2} - 2k\pi \end{array} \right. \end{cases}$$

c) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1$ $\quad \left\{ 2 \operatorname{sen} \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = 1 \right.$

$\cos x + \cos y = \sqrt{3}$ $\quad \left. 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2} = \sqrt{3} \right\}$

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \frac{x+y}{2} = \begin{cases} 30^\circ \\ 210^\circ \end{cases}$$

$$2 \operatorname{sen} 30 \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Longrightarrow \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{x-y}{2} = 0 \left\{ \begin{array}{l} x + y = 60 \\ x - y = 0 \end{array} \right| \; x = y = 30 + 360 \text{ K}$$

$$2 \operatorname{sen} 210 \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Longrightarrow \cos \frac{x-y}{2} = -1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{x-y}{2} = 180 \left\{ \begin{array}{l} x + y = 420 \\ x - y = 360 \end{array} \right| \; \begin{array}{l} x = 30 + 360 \text{ K} \\ y = 80 + 360 \text{ K} \end{array}$$

36.

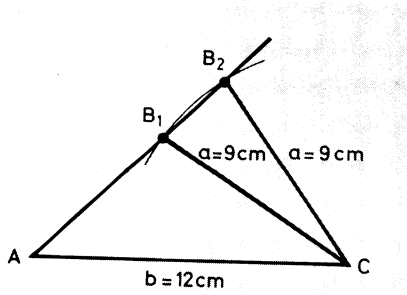


FIG. 1.16.

Como puede observarse hay dos triángulos-solución.

Dependiendo de la longitud de a podría haber habido una sola solución o ninguna.

37. $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen} B = \frac{b}{a}\operatorname{sen} A = \frac{40}{35}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}988 \begin{cases} B_1 = 81^\circ\ 47' \\ B_2 = 98^\circ\ 13' \end{cases}$$

$$C_1 = 180^\circ - (60^\circ + 81^\circ\ 47') = 38^\circ\ 13'$$

$$C_2 = 180^\circ - (60^\circ + 98^\circ\ 13') = 21^\circ\ 47'$$

$$c_1 = a\cdot\frac{\operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A} \doteq 35\cdot\frac{0{,}6186}{0{,}866} = 25 \text{ mm}$$

$$c_2 = a\cdot\frac{\operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A} = 35\cdot\frac{0{,}3711}{0{,}866} = 15 \text{ mm}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\, b\cdot c_1\cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 433{,}01 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\, b\cdot c_2\cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 259{,}81 \text{ mm}^2$$

38. $c^2 = 15^2 + 10^2 - 2\cdot 15\cdot 10\cdot 0{,}8192 = 79{,}25$; $\quad c = 8{,}9$ cm;

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B};$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}\cdot\operatorname{sen} C = \frac{10}{8{,}9}\cdot 0{,}5736 \Longrightarrow B = 40^\circ\ 7'$$

$$A = 180 - (35^\circ + 40^\circ\ 7') = 104^\circ\ 53'$$

$$S = \frac{1}{2}\, a\cdot b\cdot \operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{1}{2}\, 15\cdot 10\cdot 0{,}5736 = 43{,}02 \text{ cm}^2$$

39. $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \Longrightarrow \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}$$

40. $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{180-C}{2}=90-\dfrac{C}{2}$

$$\frac{15+10}{15-10}=\frac{\operatorname{tg}(90-C/2)}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}; \qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{1}{5}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{0{,}3153}=0{,}643 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A-B&=64^\circ\ 46' \\ A+B&=145^\circ \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A&=104^\circ\ 53' \\ B&=\ 40^\circ\ 7' \end{aligned}$$

El teorema de los senos completa el problema.

41. Sea el cuadrilátero el de la figura 1.17. Resolviendo $\overset{\frown}{ABC}$, se conocen $\hat{B}$ y α. Si luego se resuelve $\overset{\frown}{ABD}$, se calculan $\hat{A}$ y $\beta=\hat{A}-\alpha$. En $\overset{\frown}{ACD}$ pueden calcularse $\overline{CD}$ y $\hat{D}$. Finalmente,

$$\hat{C}=360-(A+B+D).$$

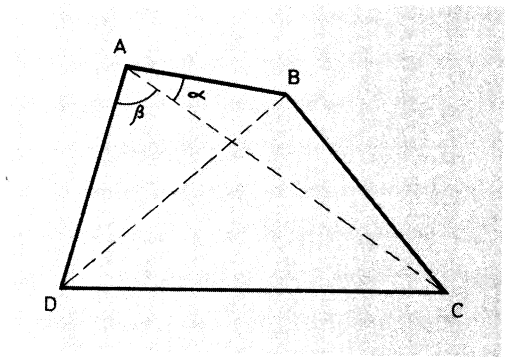


FIG. 1.17.

La solución es:

$$\begin{aligned} A&=\ 94^\circ\ 32'\ 26''; \\ B&=126^\circ\ \ 2'\ 43''; \\ C&=\ 88^\circ\ 22'\ 50''; \\ D&=\ 51^\circ\ \ 2'\ \ 1''; \\ \overline{CD}&=6{,}8 \text{ metros.} \end{aligned}$$

42. $x=50\cdot\operatorname{sen}\beta; \qquad \beta=90^\circ-\alpha$

$x=50\cdot\cos\alpha.$

En $\widehat{ABC}$, usando el teorema de los senos:

$$\frac{65}{\operatorname{sen} 68^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} C} \implies C = 45^\circ\ 29'\ 51''$$

$$B = 66^\circ\ 30'\ 9'' = \alpha$$

$$x = 50 \cos \alpha = 19{,}93 \text{ metros.}$$

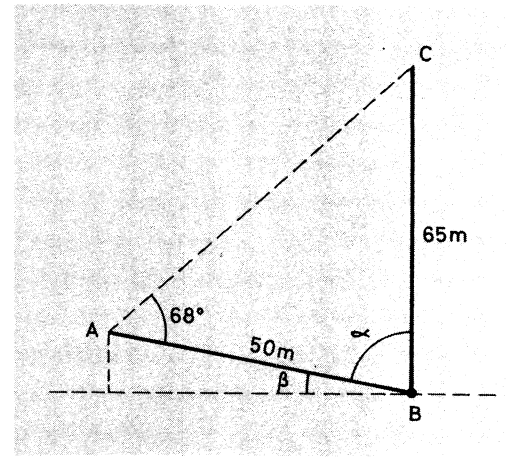


FIG. 1.18.

43. En el triángulo rectángulo $\widehat{BHC}$: $h = a \operatorname{sen} C$.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \operatorname{sen} C.$$

44.
$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \implies \operatorname{sen} C = \frac{c}{2R}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

45. $S = [OAB] + [OAC] + [OCB] = \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} ar =$

$$= r \cdot \frac{a+b+c}{2} = p \cdot r.$$

46. $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} =$

$$= \frac{1}{2} a \cdot b \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$S = \frac{2ab}{2ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

1.3

El número complejo

1. EL PLANO COMPLEJO

Para estudiar ciertos aspectos relacionados con los números complejos, algunos matemáticos, como GAUSS y ARGAND, introdujeron, a finales del siglo XVIII, una representación gráfica de dichos números que ha resultado ser muy importante y fecunda. La idea que les guió fue la siguiente:

Si en el plano euclídeo se elige un sistema de referencia ortogonal, y se considera un número complejo

$$z = a + bi$$

el par de números reales (a, b) se pueden considerar como las coordenadas de un punto P del plano. A cada número complejo se le hace corresponder así un punto perfectamente determinado, el de cordenadas (a, b), que recibe el nombre de «afijo» del número complejo $z = a + bi$.

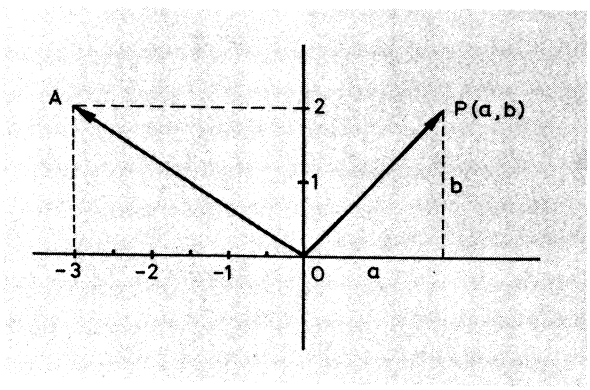


FIG. 1.19.

Al eje de abscisas se le suele llamar *eje real,* y *eje imaginario* al de ordenadas, por ser soportes respectivos de la parte real e imaginaria del número complejo.

Ejemplo 17

En la figura 1.19 el punto A es el afijo del número complejo $-3+2i$.

Ejercicio 47

Tomando un par de ejes rectangulares, y como unidad de medida el centímetro, señálense los afijos de los siguientes números complejos

$$i; \quad -4-3i; \quad -4; \quad 2-\pi i; \quad 4+4i.$$

Recíprocamente, dado un punto cualquiera del plano existe un único número complejo del cual dicho punto es el afijo. Por tanto, existe una biyección entre el conjunto de puntos del plano y el cuerpo de los números complejos. Al par formado por el plano y la biyección del cuerpo complejo sobre él se le suele llamar *plano complejo* o *plano de Gauss.*

Con esta interpretación geométrica de la parte real y la imaginaria de un número complejo como coordenadas cartesianas de su afijo, el complejo viene representado por un vector, el $\overrightarrow{OP}$, determinado por el origen de coordenadas y el afijo del complejo.

Ejercicio 48

Supónganse dibujadas en el plano las bisectrices de los cuatro ángulos que forman los ejes del sistema de referencia. Si se traza una circunferencia de centro el origen y radio 3, y se designan por A, B, C y D los puntos de corte de la misma con las dos bisectrices, ¿cuáles son los complejos de afijos A, B, C y D?

2. MODULO Y ARGUMENTO DE UN NUMERO COMPLEJO

Con ayuda de la representación gráfica de los números complejos es posible asignar a un número complejo $z=a+bi$ dos números reales que tienen una significación geométrica inmediata.

Definición:

Dado un número complejo $z=a+bi$, se llama *módulo* de z, y se representa por $|z|$, al número real no negativo

$$\sqrt{a^2+b^2}.$$

De la definición se deduce que el módulo de un complejo no es sino la distancia del origen O al afijo P de dicho complejo, esto es, el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$.

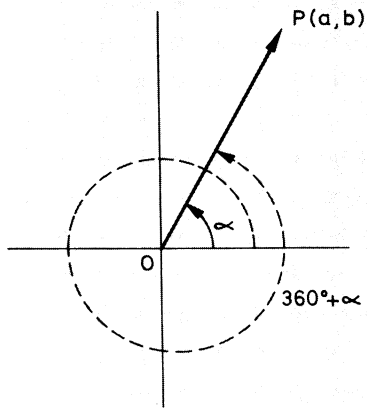


FIG. 1.20.

El módulo del complejo nulo vale O, de manera obvia. Recíprocamente, si un complejo z tiene módulo cero es porque z es el complejo O.

Definición:

> Dado un número complejo $z \neq O$, se llama argumento de z, y se representa por $arg\, z$, al ángulo determinado por el semieje real positivo y la semirrecta de origen O que contiene al afijo P de z. No se define el argumento del complejo O.

Conviene observar que el argumento de un número complejo no está determinado de forma única por el número, ya que si α es un argumento también lo es $\alpha + 360°$ y, en general, $\alpha + 360° \cdot k$, donde k es un número entero arbitrario, positivo, negativo o nulo.

El argumento queda determinado salvo un múltiplo de 360°, en el sentido de que dos ángulos que se diferencien en un múltiplo entero de 360° deben considerarse equivalentes.

Dada la existencia de infinitos argumentos de un número complejo, se suele elegir de entre todos ellos, el único comprendido entre 0° y 360°, al que se le da el nombre de *argumento principal.*

Ejemplo 18

El módulo del complejo $2-3i$ es

$$|2-3i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

El módulo de $2i$ vale

$$|2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Ejemplo 19

El complejo i tiene por argumento 90° (véase Fig. 1.21). Este es su argumento principal. También el ángulo de 450° es un argumento de i.

El argumento principal de $-1+i$ es 135°.

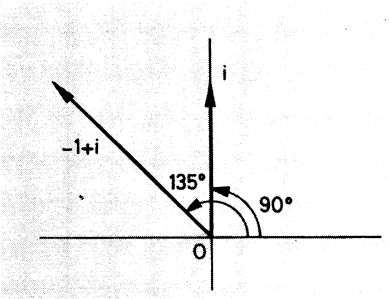


FIG. 1.21.

3. DETERMINACION DEL MODULO Y DEL ARGUMENTO DE UN NUMERO COMPLEJO

Como ya se ha indicado, y se desprende de la definición, el cálculo del módulo del complejo $a+bi$ se reduce a hallar la raíz cuadrada de a^2+b^2.

Para el cálculo del argumento, mirando la figura 1.22, se deduce que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

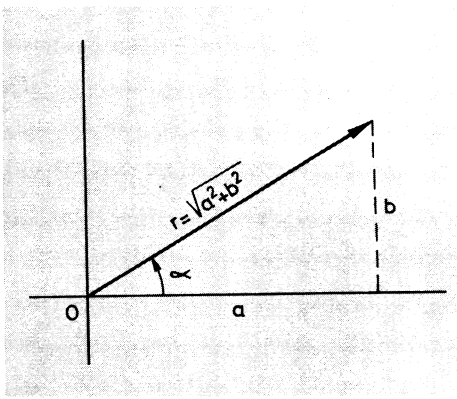


FIG. 1.22.

de donde

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$

Si buscamos el argumento principal, es decir, el ángulo α comprendido entre 0° y 360°, hay que tener en cuenta que existen dos ángulos en dicho intervalo cuya tangente es b/a. Dichos ángulos se diferencian en 180°, y la elección del adecuado se realiza viendo en cuál de los cuatro cuadrantes se encuentra situado el afijo del complejo dado.

Si se quiere calcular el módulo y el argumento del número complejo $\sqrt{3}-i$ se procede como sigue:

$$\text{módulo} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

En cuanto al argumento

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Los ángulos de 150° y 330° tienen por tangente $-1/\sqrt{3}$. Pero es claro que el primero debe rechazarse, pues el afijo P del complejo que se está considerando está situado en el cuarto cuadrante, y no en el segundo. Por tanto, el argumento del complejo dado es 330°.

En resumen:

Dado el número complejo $a+bi$, su módulo r y su argumento α vienen dados por:

$$r = \sqrt{a^2+b^2}; \qquad \alpha = \text{arc tg}\, b/a.$$

4. FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

Dado un número complejo, su módulo queda determinado de forma única, y su argumento también, salvo un múltiplo de 360°.

Consideremos ahora el problema inverso. Dados dos números reales, r y α, con la única limitación de ser $r \geqslant 0$, existe un número complejo, y sólo uno, $a+bi$, tal que r es su módulo y α uno de sus argumentos.

Haremos la demostración, viendo que las ecuaciones anteriores

$$r = \sqrt{a^2+b^2}; \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

tienen una única solución (a, b) dados r y α.

De la ecuación $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$ se deduce $b = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$, y llevando este valor a la primera:

$$r = \sqrt{a^2 + a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}$$

Pero, como se sabe

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

de manera que

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \alpha}} = \frac{a}{\cos \alpha}$$

Como se ha supuesto que r es mayor que cero no cabe indeterminación en cuanto al signo. Así, si $\cos\alpha$ es positivo, a será positivo, y negativo si es negativo $\cos\alpha$. De aquí que

$$a = r \cos \alpha$$

y llevando este valor a la expresión de b

$$b = r \operatorname{sen} \alpha$$

Por tanto:

El número complejo de módulo r y argumento α es

$$z = r \cos \alpha + ir \operatorname{sen} \alpha = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

A esta expresión de un número complejo se le llama forma polar del mismo, o forma módulo-argumental.

Es muy común encontrar una abreviatura de la expresión anterior, escribiendo el complejo de módulo r y argumento α en la forma r_α.

Ejemplo 21

La forma módulo argumental del complejo $\sqrt{3} - i$, considerado en el ejemplo anterior, cuyo módulo es 2 y cuyo argumento principal es 330°, resulta ser

$$2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$$

Ejercicio 49

Compruébese que también es posible escribir el complejo anterior en la forma:

$$2(\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°)$$

Ejercicio 50

Exprésese en forma módulo-argumental el número complejo $1-i$.

Ejercicio 51

Pónganse en forma polar o módulo-argumental los siguientes complejos

a) $z=-i$; *b)* $z=-12+5i$ (dato: sen 22° 37′ 12″ = 5/13).

Ejercicio 52

Exprésense en forma binómica los siguientes complejos dados en forma módulo-argumental:

a) $z=3(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$;
b) $z=4(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$;
c) $z=0{,}5(\cos 23° 15' + i \operatorname{sen} 23° 15')$ (dato: sen 23° 15′ = 0,3947).

5. PRODUCTO DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

La ventaja de la representación módulo-argumental o polar de los números complejos se pone de manifiesto cuando se trata de efectuar el producto de dos de ellos.

Sean los números complejos:

$$z_1 = r_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$
$$z_2 = r_2(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

El número complejo producto de ambos es

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot r_2(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) =$$
$$= r_1 r_2 [(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)].$$

Pero, como es sabido,

$$\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos(\alpha + \beta)$$
$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

de modo que el producto de los dos complejos considerados es

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$

Por tanto, se puede enunciar:

> El producto de dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos de los factores.

Haciendo uso de la abreviatura para representar al complejo de módulo r y argumento α el resultado anterior puede escribirse en la forma:

$$(r_1)_\alpha \cdot (r_2)_\beta = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha+\beta}$$

Ejemplo 22

El producto de los complejos 3_{120° y 2_{60° es

$$(3 \cdot 2)_{120^\circ+60^\circ} = 6_{180^\circ}$$

$$6_{180^\circ} = 6\,(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = 6(-1 + i \cdot 0) = -6.$$

Ejercicio 53

Efectúense las siguientes multiplicaciones, expresando el resultado en forma binómica:

a) $(1_{15^\circ}) \cdot (3_{45^\circ})$;

b) $(4_{35^\circ}) \cdot (2_{115^\circ})$;

c) $(2_{\pi/6}) : (3_{\pi/3})$.

6. INVERSO DE UN COMPLEJO. COCIENTE DE NUMEROS COMPLEJOS

Como los números complejos forman un cuerpo, todo complejo no nulo posee un inverso, es decir, dado $z \neq 0$, existe otro número complejo z^{-1} tal que

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Cuando el complejo z viene dado en forma binómica se sabe ya calcular su inverso. Lo que ahora pretendemos es efectuar el cálculo del inverso de z en forma módulo-argumental.

Sea $z = r\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, $z \neq 0$. La hipótesis de ser $z \neq 0$ es equivalente a ser $r \neq 0$.

Como la existencia del inverso está asegurada, sean ρ y β el módulo y el argumento de z^{-1}, de forma que

$$z^{-1} = \rho\,(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

Por el resultado fundamental relativo al producto de complejos se tiene:

$$1 = z \cdot z^{-1} = r \cdot \rho\,[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$

Para que se cumpla la relación anterior basta tomar

$$r \cdot \rho = 1; \qquad \alpha + \beta = 360° \cdot k$$

pues los argumentos del complejo 1 son $0° + 360° \cdot k$, donde k es un entero arbitrario.

De la primera relación se deduce que $\rho = 1/r$. De la segunda, si se toma $k = 0$, se obtiene $\beta = -\alpha$.

En consecuencia,

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)) = r^{-1}(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)$$

> El número complejo inverso de uno dado tiene por módulo el inverso del módulo y por argumento el opuesto del argumento del complejo en cuestión. Simbólicamente:
>
> $$[(r)_\alpha]^{-1} = (r^{-1})_{-\alpha}$$

Con este resultado es inmediato resolver el problema de hallar el cociente de dos complejos

$$\frac{z_1}{z_2},$$

puesto que, escrito en la forma equivalente,

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

basta multiplicar el primero por el inverso del segundo. Si los números complejos considerados son

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$
$$z_2 = r_2(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$

se obtiene

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot r_2^{-1}(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta) =$$

$$= r_1(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot \frac{1}{r_2}(\cos(-\beta) + i \operatorname{sen}(-\beta)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

El cociente de dos complejos es otro complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos de dividendo y divisor, y por argumento la diferencia de los argumentos del dividendo y del divisor. Para que la división sea posible, el divisor debe de ser distinto de 0.

$$\frac{(r_1)_\alpha}{(r_2)_\beta} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{\alpha-\beta}$$

Ejemplo 23

Calcúlese el cociente de los complejos 2_{115° y 3_{235°.
El resultado se escribe inmediatamente, pues es el número complejo:

$$(2/3)_{-120^\circ}$$

es decir,

$$\frac{2}{3}[\cos(-120^\circ) + i \operatorname{sen}(-120^\circ)] = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ejercicio 54

Simplifíquense las siguientes expresiones, reduciéndolas a un sólo complejo que se expresará en forma binómica:

a) $\dfrac{(2_{15^\circ})\cdot(4_{35^\circ})}{8_{170^\circ}}$; *b)* $\dfrac{(1+i)\cdot(2_{15^\circ})}{(1-i)\cdot(2_{-15^\circ})}$.

Ejercicio 55

Exprésese en forma binómica:

$$\frac{5(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)}{3(\cos 63^\circ + i \operatorname{sen} 63^\circ)\cdot(\cos 52^\circ + i \operatorname{sen} 52^\circ)}$$

Ejercicio 56

Si $z = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$, *¿cuál es el argumento de* $1+z$? *Póngase en forma módulo argumento este último complejo.*

7. EL GRUPO DE LOS COMPLEJOS UNIMODULARES

Un número complejo se llama unimodular si su módulo es la unidad. La expresión de un complejo unimodular es, por tanto,

$$\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

> Los complejos unimodulares, con la operación producto de complejos, forman un grupo conmutativo.

Para demostrar este resultado no hace falta ir comprobando que se verifican cada uno de los axiomas de la estructura de grupo. La razón es que al constituir todos los complejos un cuerpo, aquéllos que son distintos de cero constituyen un grupo para la multiplicación. Al ser el cuerpo conmutativo, cualquier subgrupo de este grupo lo será también, y la propiedad asociativa estará garantizada por cumplirse en el cuerpo. Lo único que habrá que verificar es:

I. El producto de dos complejos unimodulares es un complejo unimodular.
II. El inverso de un complejo unimodular es otro complejo unimodular.

I. *Demostración:* Si se toman dos complejos unimodulares

$$\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta$$

su producto es

$$\cos (\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

según el resultado fundamental relativo al producto de números complejos. Obviamente, este complejo es unimodular, pues

$$\cos^2 (\alpha + \beta) + \operatorname{sen}^2 (\alpha + \beta) = 1$$

II. *Demostración:* El inverso del complejo unimodular

$$\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

es, según el resultado fundamental relativo al inverso de un complejo,

$$\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha$$

lo que puede comprobarse directamente, multiplicando ambos.

Es inmediato ver que este último complejo es también unimodular, pues

$$(\cos \alpha)^2 + (-\operatorname{sen} \alpha)^2 = 1$$

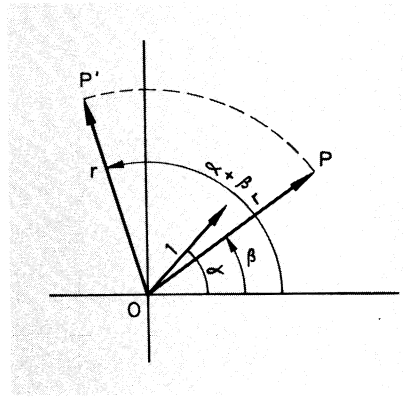


FIG. 1.23.

8. INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO DE COMPLEJOS

Se va a considerar en primer lugar el caso en que uno de los dos factores de un producto es un complejo unimodular, $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

Sea el producto

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)\cdot r\,(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$

o, abreviadamente,

$$(1_\alpha)\cdot(r_\beta)$$

El resultado de esta multiplicación no es otro que

$$r_{\alpha+\beta}$$

es decir, un número complejo del mismo módulo que el segundo factor y cuyo argumento es $\beta+\alpha$.

Si P es el afijo del complejo r_β, y P' el afijo de $r_{\alpha+\beta}$, resulta claro que el vector $\overrightarrow{OP}$, representación gráfica del primer complejo, se transforma en el $\overrightarrow{OP'}$ mediante un giro en torno al origen O, de amplitud α. Por tanto, el efecto de multiplicar un complejo cualquiera por uno unimodular de argumento α es hacer girar el afijo del primero un ángulo α en torno a O.

En particular, y puesto que el complejo i es unimodular:

> La multiplicación de un número complejo por i tiene por efecto girar el vector representativo del primero un ángulo recto en sentido positivo.

Ejemplo 3.3

Si se toma el complejo $1+i$, cuyo afijo (dibújese) está sobre la bisectriz del primer cuadrante, y se multiplica por i, queda

$$i \cdot (1+i) = i + i^2 = i - 1$$

cuyo afijo, que es el punto $(-1, 1)$, es el resultado de girar el $(1, 1)$ un ángulo de $90°$ en torno a O, en sentido directo.

El resultado anterior es importante desde el punto de vista práctico, pues reduce la rotación de ángulo α en torno al origen a multiplicar por un complejo unimodular de argumento α.

Ejemplo 3.4

Si se quiere hallar cuál es el punto transformado del de coordenadas $(1, -2)$ en el giro en torno al origen y sentido positivo, de amplitud $120°$, bastará multiplicar el complejo de afijo $(1, -2)$ por uno unimodular de argumento $120°$. Se tiene así:

$$(1-2i) \cdot (\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = (1-2i) \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3} \right) + i \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Las coordenadas del punto buscado son

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3},\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Volviendo ahora al caso general, sean z_1 y z_2 dos complejos cualesquiera

$$z_1 = r_1 (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$
$$z_2 = r_2 (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

El producto de ambos es

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos (\alpha + \beta) + i \operatorname{sen} (\alpha + \beta)]$$

El efecto neto de multiplicar el primer complejo por el segundo ha sido doble: Por un lado se ha girado el vector $\overrightarrow{OP_1}$, representativo del primer complejo, un ángulo β, y por otro se ha multiplicado el módulo por r_2. Naturalmente, y dado que los dos factores juegan papel simétrico, el vector $\overrightarrow{OP_2}$ ha girado en torno al origen un ángulo α y su módulo ha quedado multiplicado por r_1.

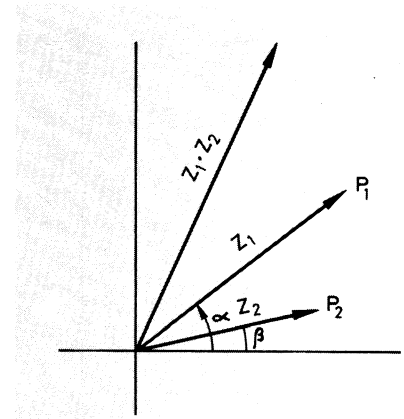


FIG. 1.24.

Ejercicio 57

Hállense las coordenadas del afijo del complejo que se obtiene girando en torno a O el vector representativo del número $2-3i$ *un ángulo de* $225°$.

Ejercicio 58

Dos vértices consecutivos de un cuadrado son el origen de coordenadas y el punto $(3, -1)$. *Hállense las coordenadas de los otros dos vértices, sabiendo que son de ordenada positiva.*

Ejercicio 59

Un triángulo equilátero ABC tiene el vértice A coincidente con el origen de coordenadas; el vértice B es el afijo del complejo $2-i$ *y el tercer vértice C se encuentra situado en el primer cuadrante. Hallar las coordenadas de C.*

Ejercicio 60

El afijo P de un complejo se transforma en el punto $P'(-2, 4)$ *después de haber aplicado a P un giro de centro el origen y amplitud* $135°$. *¿Cuáles son las coordenadas de P?*

9. POTENCIACION DE COMPLEJOS. FORMULA DE DE MOIVRE

Consideremos un complejo dado en forma polar:

$$z = r\,(\cos\alpha + i\,\operatorname{sen}\alpha)$$

Por el resultado fundamental referente al producto de números complejos,

$$z^2 = z \cdot z = r \cdot r\,(\cos(\alpha+\alpha) + i\,\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)) = r^2\,(\cos 2\alpha + i\,\operatorname{sen} 2\alpha)$$

Enunciemos el resultado:

> El cuadrado de un número complejo z es otro complejo que tiene por módulo el cuadrado del módulo de z, y por argumento el doble del argumento de z.

El complejo $1-i$ tiene por módulo

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

y su argumento vale $315°$ o, si se prefiere, $-45°$, como puede verse en la figura 1.25.

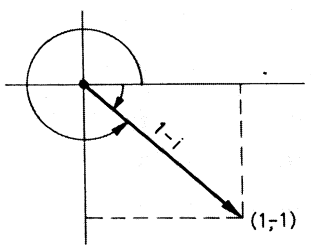


FIG. 1.25.

Su cuadrado, según lo anterior, será el complejo de módulo $(\sqrt{2})^2 = 2$ y de argumento $2 \cdot (-45°) = -90°$, es decir, el complejo $-2i$, como se comprueba, calculando directamente el cuadrado en forma binómica:

$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i.$$

Si se quiere calcular el cubo de z, se tendrá:

$$z^3 = z \cdot z^2 = [r\,(\cos\alpha + i\,\operatorname{sen}\alpha)] \cdot [r^2\,(\cos 2\alpha + i\,\operatorname{sen} 2\alpha)] =$$
$$= r^3\,(\cos 3\alpha + i\,\operatorname{sen} 3\alpha)$$

y, en general, para cualquier n natural, es correcta la fórmula:

$$z^n = [r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

El resultado anterior se conoce con el nombre de fórmula de De Moivre.

Ejercicio 61

Demuéstrese, por inducción sobre N, la fórmula de De Moivre.

Ejercicio 62

Calcúlense, aplicando la fórmula de De Moivre, las siguientes potencias:

a) $(\cos 22^\circ 30' + i \operatorname{sen} 22^\circ 30')^6$;

b) $(1+i)^5$;

c) $(\cos 2\pi/3 + i \operatorname{sen} 2\pi/3)^3$.

La fórmula de De Moivre constituye un camino alternativo para calcular la potencia enésima de un número complejo, ya que también es posible efectuar el cálculo mediante la aplicación del binomio de Newton. La combinación de ambos métodos puede conducir a resultados interesantes, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Calculemos de dos maneras el cubo del complejo

$$z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

Como el módulo es la unidad, la aplicación de la fórmula de De Moivre da como resultado

$$z^3 = \cos 3\alpha + i \operatorname{sen} 3\alpha$$

mientras que el binomio de Newton proporciona

$$z^3 = \binom{3}{0} \cos^3 \alpha + \binom{3}{1} \cos^2 \alpha \cdot (i \operatorname{sen} \alpha) + \binom{3}{2} \cos \alpha \cdot (i \operatorname{sen} \alpha)^2 + \binom{3}{3} (i \operatorname{sen} \alpha)^3$$

$$= \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - i \operatorname{sen}^3 \alpha$$

Como las dos expresiones obtenidas son el mismo número complejo, deben coincidir las partes reales y las imaginarias, de forma que

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha$$

Ejercicio 63

Procédase de igual forma para obtener $\cos 5\alpha$ *y* $\operatorname{sen} 5\alpha$ *en función de* $\cos\alpha$ *y* $\operatorname{sen}\alpha$.

Ejercicio 64

Calcúlese la suma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$$

(Indicación: elévese $1+i$ *a la potencia enésima y véase cuál es la parte real del resultado, calculándola mediante la fórmula de De Moivre, también.)*

10. RAICES ENESIMAS DE UN COMPLEJO

Dado un número complejo

$$w = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

y un natural n, tratemos de hallar los complejos

$$z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

tales que

$$z^n = w$$

Cada número complejo, solución de la ecuación anterior, se llama una *raíz enésima de* w.

Si $z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ es una raíz enésima de w, debe ser $z^n = w$, y como según la fórmula de De Moivre

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

deberá verificarse

$$r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Para que estos dos números complejos, dados, como están, en forma polar, sean iguales, han de ser iguales sus módulos, y sus argumentos deben diferenciarse en un múltiplo entero de 360° (o 2π si los argumentos se dan en radianes). Esto es consecuencia del hecho de que un número complejo posee una infinidad de argumentos, como ya se hizo notar anteriormente.

Por tanto:

$$\begin{aligned} r^n &= \rho \\ n\alpha &= \varphi + 360° \cdot k, \quad k \in Z \end{aligned}$$

Como ρ es módulo de un complejo, es un número real positivo o nulo. Entonces r es el único número real, positivo o nulo, que elevado a n nos da ρ, es decir, la raíz enésima del número real ρ. Por consiguiente, de las relaciones anteriores se deducen:

$$r = \sqrt[n]{\rho}$$
$$\alpha = \frac{\varphi + 360° \cdot k}{n}, \quad k \in Z$$

Las expresiones anteriores dan, en función del módulo ρ y del argumento φ de w, el módulo r y el argumento α de los complejos z que son raíces enésimas de w.

En principio, la expresión del argumento α proporciona una infinidad de valores del mismo, debido a la presencia del factor k, que puede tomar todos los valores enteros. Sin embargo, el número de raíces enésimas de w es finito e igual a n. Para verlo, demos a k los valores 0, 1, 2, ..., $n-1$. Los argumentos resultantes son:

$$\frac{\varphi}{n};\ \frac{\varphi}{n} + \frac{360°}{n};\ \frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{360°}{n};\ \ldots;\ \frac{\varphi}{n} + (n-1) \cdot \frac{360°}{n}$$

Todos estos argumentos son distintos y corresponden a números complejos distintos, pues la diferencia de dos de los argumentos anteriores no es un múltiplo entero de 360°. Sin embargo, si damos a k el valor n se obtiene como argumento

$$\frac{\varphi}{n} + n \cdot \frac{360°}{n} = \frac{\varphi}{n} + 360°$$

equivalente al primero de la relación anterior, ya que se diferencia de él en 360°. A partir de aquí, si damos a k los valores $n+1$, $n+2$, etc., se van repitiendo los argumentos obtenidos incrementados en un múltiplo entero de 360°. Por consiguiente, sólo se pueden obtener n raíces enésimas distintas del complejo w, cuyos argumentos son los que se obtienen dando a k los valores 0, 1, 2, ..., $n-1$.

Enunciemos el resultado obtenido:

El número complejo $w = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ posee n raíces enésimas distintas dadas por la expresión:

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\varphi + 360° k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi + 360° k}{n}\right]$$

cuando a k se le dan los valores 0, 1, 2, ..., $n-1$.

Ejercicio 65

¿Cuántas raíces enésimas tiene el complejo $w=0$*?*

Se quieren calcular las raíces cúbicas de -1, es decir, resolver la ecuación

$$z^3=-1.$$

Según el estudio anterior, existirán tres raíces.

El módulo del número complejo -1 es 1, y su argumento principal es 180°. Por tanto,

$$z=\sqrt[3]{1}\left[\cos\frac{180°+360°\cdot k}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{180°+360°\cdot k}{3}\right]$$

donde a k deben dárseles los valores 0, 1 y 2, obteniendo:

para $k=0$: $\quad\cos\ 60°+i\,\text{sen}\ 60°=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

para $k=1$: $\quad\cos 180°+i\,\text{sen}\,180°=-1$

para $k=2$: $\quad\cos 300°+i\,\text{sen}\,300°=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

El módulo, para las tres, es 1.

Obsérvese que los argumentos de las tres raíces se obtienen a partir del primero de ellos, sumando al anterior 120°, es decir, la tercera parte de la circunferencia.

Ejercicio 66

Una de las raíces cuartas de un complejo w *es*

$$z=2\,(\cos 150°+i\,\text{sen}\,150°).$$

Hállense las otras tres raíces y el complejo w.

Ejercicio 67

Hállense las raíces cúbicas de $-8i$.

Ejercicio 68

Obténganse las raíces cuartas de 16.

Ejercicio 69

Hállense las raíces quintas de $i-\sqrt{3}$.

11. RAICES ENESIMAS DE LA UNIDAD

Las raíces enésimas de la unidad son todas las soluciones de la ecuación

$$z^n = 1.$$

El número 1 es un complejo de módulo 1 y argumento 0°. Las raíces enésimas de dicho complejo vienen dadas por

$$z = \cos \frac{360° \, k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{360° \, k}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Para $k = 0$ se obtiene como argumento 0°, por lo que una de las raíces enésimas es $z = 1$. Caundo n es par hay otra raíz, la de argumento 180°, es decir, -1, también real. Todas las restantes raíces de la unidad son complejas.

Llamemos ω a la raíz enésima de la unidad de argumento $\alpha = 360°/n$, esto es, la correspondiente a $k = 1$. Entonces, las correspondientes a $k = 2, 3, \ldots, n-1$ tienen por argumentos 2α, 3α, ..., $(n-1)\alpha$. Como todas tienen por módulo 1 resulta, teniendo en cuenta la fórmula de De Moivre, que la de argumento 2α es el cuadrado de la de argumento α, la de argumento 3α es el cubo de la de argumento α, y así sucesivamente.

De esta forma, a partir de ω se obtienen todas las raíces de la unidad sin más que calcular ω^2, ω^3, ..., ω^{n-1}. Obviamente, al ser ω una raíz enésima de la unidad se tiene

$$\omega^n = 1.$$

A partir de aquí, si se sigue elevando ω a potencias $n+1$, $n+2$, ..., se vuelven a repetir las raíces antes obtenidas.

Si se representan gráficamente las n raíces, puesto que todas tienen módulo uno, los afijos correspondientes se hallarán sobre la circunferencia de centro el origen y radio unidad. Y puesto que se pasa de una a otra sumando a cada argumento el ángulo $360°/n$, los citados afijos se hallarán igualmente espaciados sobre la circunferencia, ocupando los vértices del polígono regular de n lados inscrito en la misma, uno de cuyos vértices es el afijo de 1.

Ejercicio 70

Sea ω una raíz enésima de la unidad distinta de 1. Hállese cuánto vale la suma

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1}$$

TABLA 1.1. **Razones trigonométricas naturales**

SENOS NATURALES (I)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0,0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	0,0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	0,0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	0,1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	0,1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	0,1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	11	14
9	0,1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	11	14
10	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	0,1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	0,2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	0,2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	0,2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	0,2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	0,2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	0,3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	0,3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	0,3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	13
22	0,3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	13
23	0,3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	13
24	0,4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	0,4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	0,4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	0,4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	0,4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	12
31	0,5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	0,5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	0,5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	0,5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	0,5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	0,6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	0,6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	0,6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	0,6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	0,6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	0,6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	0,6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10
	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′

TABLA 1.1. **Razones trigonométricas naturales** *(cont.)*

SENOS NATURALES (II)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
45°	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	0,7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	0,7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	0,7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	0,7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	0,7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	0,7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	0,7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	0,8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	0,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	0,8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	0,8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	0,8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	0,8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	0,8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	0,8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	0,8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	0,8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	2	4	5	6
65	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	4	5	6
67	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	0,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	0,9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	0,9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	0,9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	3	3	4
74	0,9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	0,9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	0,9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	0,9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	2	3
78	0,9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	0,9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	0,9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	0,9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	1	2
83	0,9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	0,9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	1
85	0,9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	0,9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	0,9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	0,9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	0,9998	9999	9999	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	0	0	0	0	0
	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′

TABLA 1.1. **Razones trigonométricas naturales** *(cont.)*

COSENOS NATURALES (I)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
0	1,0000	0000	0000	0000	0000	0000	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	0,9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	0,9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	0,9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	0,9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	0,9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	1
6	0,9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	0,9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	1	2
8	0,9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	0,9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	0,9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	0,9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	0,9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	2	3
13	0,9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	0,9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	0,9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	0,9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	3	3	4
17	0,9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	4
18	0,9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	0,9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	0,9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	0,9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	0,9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	0,9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	4	5	6
24	0,9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	0,9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	2	4	5	6
26	0,8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	0,8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	0,8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	0,8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30	0,8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	0,8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	0,8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	0,8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	0,8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	0,8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	0,8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	0,7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	0,7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	0,7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	0,7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	0,7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	0,7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	0,7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	0,7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10
	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′

TABLA 1.1. **Razones trigonométricas naturales** *(cont.)*

COSENOS NATURALES (II)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
45	0,7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	0,6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	0,6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	0,6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	0,6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	0,6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	0,6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	0,6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	0,6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	0,5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	0,5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	0,5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	0,5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	0,5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	0,5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	12
60	0,5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	0,4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	0,4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	0,4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	0,4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	0,4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	0,4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	13
67	0,3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	13
68	0,3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	13
69	0,3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70	0,3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	0,3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	0,3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	0,2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	0,2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	0,2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	0,2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	0,2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	0,2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	0,1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80	0,1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	11	14
81	0,1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	11	14
82	0,1392	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	0,1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	0,1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	0,0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	15
86	0,0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	0,0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	0,0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	0,0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15
	0′	**6′**	**12′**	**18′**	**24′**	**30′**	**36′**	**42′**	**48′**	**54′**	**1′**	**2′**	**3′**	**4′**	**5′**

TABLA 1.1. **Razones trigonométricas naturales** *(cont.)*

TANGENTES NATURALES (I)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	15
15	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	10	13	16
17	0,3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	0,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	0,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	24
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	0,9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	0,9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	0,9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29
	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′

TABLA 1.1. **Razones trigonométricas naturales** *(cont.)*

TANGENTES NATURALES (II)

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
45°	1,0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1,0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1,0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1208	1067	6	13	19	25	32
48	1,1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1,1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1,1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1,2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	37
52	1,2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1,3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1,3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1,4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1,4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1,5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1,6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1,6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	57
60	1,732	1,739	1,746	1,753	1,760	1,767	1,775	1,782	1,789	1,797	1	2	4	5	6
61	1,804	1,811	1,819	1,827	1,834	1,842	1,849	1,857	1,865	1,873	1	3	4	5	6
62	1,881	1,889	1,897	1,905	1,913	1,921	1,929	1,937	1,946	1,954	1	3	4	5	7
63	1,963	1,971	1,980	1,988	1,997	2,006	2,014	2,023	2,032	2,041	1	3	4	6	7
64	2,050	2,059	2,069	2,078	2,087	2,097	2,106	2,116	2,125	2,135	2	3	5	6	8
65	2,145	2,154	2,164	2,174	2,184	2,194	2,204	2,215	2,225	2,236	2	3	5	7	8
66	2,246	2,257	2,267	2,278	2,289	2,300	2,311	2,322	2,333	2,344	2	4	6	7	9
67	2,356	2,367	2,379	2,391	2,402	2,414	2,426	2,438	2,450	2,463	2	4	6	8	10
68	2,475	2,488	2,500	2,513	2,526	2,539	2,552	2,565	2,578	2,592	2	4	7	9	11
69	2,605	2,619	2,633	2,646	2,660	2,675	2,689	2,703	2,718	2,733	2	5	7	9	12
70	2,747	2,762	2,778	2,793	2,808	2,824	2,840	2,856	2,872	2,888	3	5	8	10	13
71	2,904	2,921	2,937	2,954	2,971	2,989	3,006	3,024	3,042	3,060	3	6	9	12	14
72	3,078	3,096	3,115	3,133	3,152	3,172	3,191	3,211	3,230	3,251	3	6	10	13	16
73	3,271	3,291	3,312	3,333	3,354	3,376	3,398	3,420	3,442	3,465	4	7	11	14	18
74	3,487	3,511	3,534	3,558	3,582	3,606	3,630	3,655	3,681	3,706	4	8	12	16	20
75	3,732	3,758	3,785	3,812	3,839	3,867	3,895	3,923	3,952	3,981					
76	4,011	4,041	4,071	4,102	4,134	4,165	4,198	4,230	4,264	4,297					
77	4,331	4,366	4,402	4,437	4,474	4,511	4,548	4,586	4,625	4,665					
78	4,705	4,745	4,787	4,829	4,872	4,915	4,959	5,005	5,050	5,097					
79	5,145	5,193	5,242	5,292	5,343	5,396	5,449	5,503	5,558	5,614					
80	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243					
81	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026					
82	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028					
83	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357					
84	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20					
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95					
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46					
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27					
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08					
89	57,29	63,66	71,62	71,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0					
	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 1.3

47.

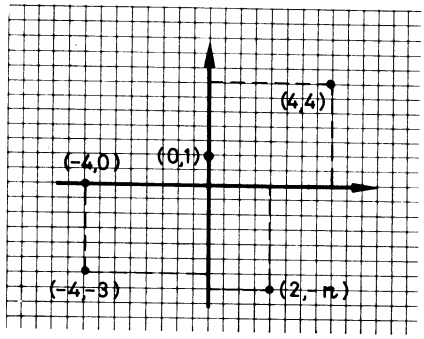
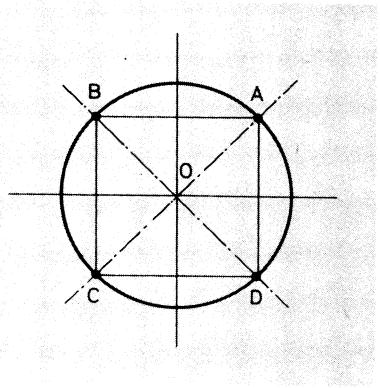


FIG. 1.26.

48.



$$A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$C\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$D\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

FIG. 1.27.

49. $\left.\begin{array}{l}\cos(-30) = \cos 30^\circ \\ \operatorname{sen}(-30) = -\operatorname{sen} 30^\circ\end{array}\right\} 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) =$

$$= 2(\cos 30^\circ - i \operatorname{sen} 30^\circ).$$

50. $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$.

51. *a)* $-i = 1_{270^\circ}$;

b) $|z| = \sqrt{144 + 25} = 13$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{5}{12} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{5}{13}\end{array}\right\} \varphi = 180 - 22^\circ\ 37'\ 12'' = 157^\circ\ 22'\ 48''$$

$$-12 + 5i = 13_{157^\circ\ 22'\ 48''}$$

52. *a)* $3(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i;$$

b) $4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i;$

c) $0{,}5(\cos 23^\circ\ 15' + i \operatorname{sen} 23^\circ\ 15') = 0{,}5(0{,}9188 + i \cdot 0{,}3947) =$

$$= 0{,}4594 + 0{,}1973\, i.$$

53. *a)* $(1_{15^\circ}) \cdot (3_{45^\circ}) = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i;$

b) $(4_{35^\circ}) \cdot (2_{115^\circ}) = 8_{150^\circ} = 8(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) =$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} + 4i;$$

c) $(2_{\pi/6}) \cdot (3_{\pi/3}) = 6_{\pi/2} = 6(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 6i.$

54. *a)* $\frac{(2_{15^\circ}) \cdot (4_{35^\circ})}{8_{170^\circ}} = \left(\frac{2 \cdot 4}{8}\right)_{15+35-170} = 1_{(-120)} = 1_{240} =$

$$= \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

b) $\frac{(1+i)(2_{15^\circ})}{(1-i)(2_{-15^\circ})} = \frac{(\sqrt{2}_{45^\circ})(2_{15^\circ})}{(\sqrt{2}_{315^\circ})(2_{-15^\circ})} = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 2}\right)_{45^\circ+15^\circ-315^\circ+15^\circ} =$

$$= 1_{(-240^\circ)} = 1_{120^\circ} = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

55. $\frac{5(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)}{3(\cos 63^\circ + i \operatorname{sen} 63^\circ) \cdot (\cos 52^\circ + i \operatorname{sen} 52^\circ)} = \left(\frac{5}{3}\right)_{25^\circ-63^\circ-52^\circ} =$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)_{-90^\circ} = \left(\frac{5}{3}\right)_{270^\circ} = \frac{5}{3}(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) =$$

$$= \frac{5}{3}(0 - 1i) = -\frac{5}{3}i.$$

56. $z = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

$$\arg(\mathbf{1}+\boldsymbol{z}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\mathbf{1}+\boldsymbol{z} = \left(\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\operatorname{sen}^2\alpha}\right)_{\alpha/2} =$$

$$= \left(\sqrt{2\,(1+\cos\alpha)}\right)_{\alpha/2}$$

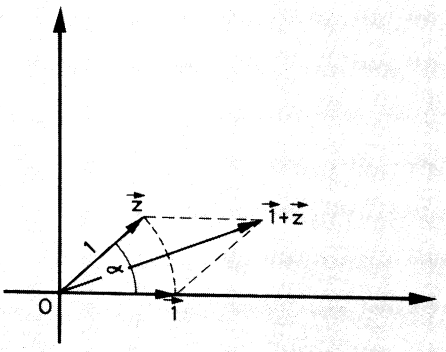


FIG. 1.28.

57. $(2-3i)\times[1\,(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)] = (2-3i)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$

$$= \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

El afijo es $\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

58. $(3-i)\times i = 3i - i^2 = 1+3i \implies D(1, 3)$

$(3-i)\times\sqrt{2}_{45^\circ} = (3-i)\,[\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)] = (3-i)\times(1+i) =$

$= 4+2i \implies C(4, 2)$

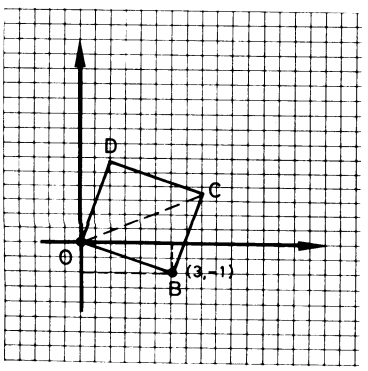


FIG. 1.29.

59.

$$(2-i)\times(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) =$$

$$= (2-i)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= 1+\sqrt{3}\,i-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}-1}{2}i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2},\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

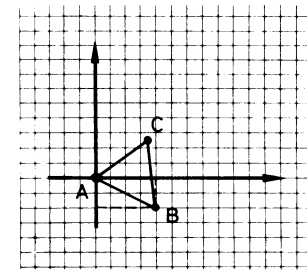


FIG. 1.30.

60. Basta aplicar a P' un giro de amplitud -135° para volver al punto P de partida. Por consiguiente, el complejo de afijo P no es otro que:

$$(-2+4i)(\cos(-135^\circ)+i\operatorname{sen}(-135^\circ)) =$$

$$= (-2+4i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 3\sqrt{2}-i\sqrt{2} \Longrightarrow P(3\sqrt{2},\ -\sqrt{2}).$$

61. La fórmula es cierta para $n=1, 2$. Suponiendo que es cierta para $n=k$, veamos que lo es para $k+1$.

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = [r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^k \cdot r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) =$$
$$= [r^k(\cos k\alpha + i\operatorname{sen} k\alpha)]\, r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) =$$
$$= r^k \cdot r(\cos(k\alpha+\alpha) + i\operatorname{sen}(k\alpha+\alpha)) =$$
$$= r^{k+1}(\cos(k+1)\alpha + i\operatorname{sen}(k+1)\alpha), \quad \text{c. q. d.}$$

62. *a)* $(\cos 22^\circ\,30' + i\operatorname{sen} 22^\circ\,30')^6 = (\cos 135^\circ + i\operatorname{sen} 135^\circ) =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

b) $(1+i)^5 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^5 = 4\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\operatorname{sen} 225^\circ) =$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -4-4i;$$

c) $(\cos 2_{\pi/3} + i\operatorname{sen} 2_{\pi/3})^3 = (\cos 2\pi + i\operatorname{sen} 2\pi) = 1+0i = 1.$

63. $z^5 = \cos 5\alpha + i \operatorname{sen} 5\alpha = \binom{5}{0}\cos^5\alpha + \binom{5}{1}\cos^4\alpha(i \operatorname{sen}\alpha) +$

$$+ \binom{5}{2}\cos^3\alpha(i \operatorname{sen}\alpha)^2 + \binom{5}{3}\cos^2\alpha(i \operatorname{sen}\alpha)^3 +$$

$$+ \binom{5}{4}\cos\alpha(i \operatorname{sen}\alpha)^4 + \binom{5}{5}(i \operatorname{sen}\alpha)^5$$

$$\cos 5\alpha = \binom{5}{0}\cos^5\alpha - \binom{5}{2}\cos^3\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + \binom{5}{4}\cos\alpha \operatorname{sen}^4\alpha$$

$$\operatorname{sen} 5\alpha = \binom{5}{1}\cos^4\alpha \operatorname{sen}\alpha - \binom{5}{3}\cos^2\alpha \operatorname{sen}^3\alpha + \binom{5}{5}\operatorname{sen}^5\alpha$$

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha \operatorname{sen}^4\alpha$$

$$\operatorname{sen} 5\alpha = 5\cos^4\alpha \operatorname{sen}\alpha - 10\cos^2\alpha \operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}^5\alpha.$$

64. $(1+i)^n = (\sqrt{2}_{45^\circ})^n = \sqrt{2^n}\,(\cos 45n + i \operatorname{sen} 45n) =$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \binom{n}{3}i^3 + \binom{n}{4}i^4 + \ldots =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3}i + \binom{n}{4} + \ldots =$$

$$= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots\right] + i\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \ldots\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots - = (\sqrt{2})^n \cdot \cos 45n \\ \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \ldots + \quad = (\sqrt{2})^n \cdot \operatorname{sen} 45n \end{cases}$$

65. El complejo $w = 0$ tiene n raíces enésimas, todas iguales a 0.

66. $w = z^4 = 16\,(\cos 600^\circ + i \operatorname{sen} 600^\circ) = 16_{240^\circ}$;

$$\alpha = \frac{240 + 360K}{4};$$

$$K = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 60^\circ \Longrightarrow z_1 = 2_{60^\circ}$$
$$K = 1 \Longrightarrow \alpha_2 = 150^\circ \Longrightarrow z_2 = 2_{150^\circ}$$
$$K = 2 \Longrightarrow \alpha_3 = 240^\circ \Longrightarrow z_3 = 2_{240^\circ}$$
$$K = 3 \Longrightarrow \alpha_4 = 330^\circ \Longrightarrow z_4 = 2_{330^\circ}$$

67. $z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8\,(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)}$;

$r = \sqrt[3]{8} = 2$;

$$\alpha = \frac{270 + 360K}{3};$$

$$K = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 90^\circ \Longrightarrow z_1 = 2_{90^\circ}$$
$$K = 1 \Longrightarrow \alpha_2 = 210^\circ \Longrightarrow z_2 = 2_{210^\circ}$$
$$K = 2 \Longrightarrow \alpha_3 = 330^\circ \Longrightarrow z_3 = 2_{330^\circ}$$

68. $z = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16\,(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)}$;

$r = \sqrt[4]{16} = 2$;

$\alpha = \dfrac{0 + 360\,K}{4}$;

$$K=0 \implies \alpha_1 = 0° \implies z_1 = 2_{0°} = 2$$
$$K=1 \implies \alpha_2 = 90° \implies z_2 = 2_{90°} = 2i$$
$$K=2 \implies \alpha_3 = 180° \implies z_3 = 2_{180°} = -2$$
$$K=3 \implies \alpha_4 = 270° \implies z_4 = 2_{270°} = -2i$$

69. $z = \sqrt[5]{-\sqrt{3} + i} = \sqrt[5]{2\,(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)}$

$r = \sqrt[5]{2}$

$\alpha = \dfrac{150 + 360\,K}{5}$;

$$K=0 \implies \alpha_1 = 30° \implies z_1 = \sqrt[5]{2_{30°}}$$
$$K=1 \implies \alpha_2 = 102° \implies z_2 = \sqrt[5]{2_{102°}}$$
$$K=2 \implies \alpha_3 = 174° \implies z_3 = \sqrt[5]{2_{174°}}$$
$$K=3 \implies \alpha_4 = 246° \implies z_4 = \sqrt[5]{2_{246°}}$$
$$K=4 \implies \alpha_5 = 318° \implies z_5 = \sqrt[5]{2_{319°}}$$

70. Recordando la suma de términos de una progresión geométrica

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n+1} = \frac{\omega^{n-1} \cdot \omega - 1}{\omega - 1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$$

Como $\omega \neq 1$, $\omega - 1 \neq 0$. Por otra parte, al ser ω una raíz enésima de la unidad

$$\omega^n = 1 \implies \omega^n - 1 = 0$$

La suma propuesta vale 0.

1.4

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Hállese para qué valores de α el vector $(\operatorname{sen}\alpha,\ 1-\cos\alpha)$ es unitario.

2. Escríbase el vector unitario de la misma dirección y sentido que el $(2, 8)$.

3. Determínese K, de modo que $(2, K)$ y $(-6, 10)$ sean vectores ortogonales.

4. Calcúlense los siguientes productos escalares:

a) $(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})\cdot(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$; *b)* $(3, 5)\cdot(2, -6)$; *c)* $(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\cdot(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$.

5. Hállense los módulos de los vectores del ejercicio anterior.

6. Determínese el ángulo que forman los vectores

$$\boldsymbol{v}=(2-\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}+1)$$
$$\boldsymbol{w}=(2,\ 1)$$

7. Se sabe que los vectores $(a, 1)$ y $(1, a)$ forman un ángulo de $\pi/6$ radianes. Calcúlese a.

8. Dígase qué ángulo forman entre sí los vectores $(-2, 1, 5)$ y $(1, 1, 3)$.

9. Hállese el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

10. El vector $\boldsymbol{v}$ es unitario y forma con el vector $\boldsymbol{i}$ de una base ortonormal un ángulo de $\pi/3$ radianes. Hállese el ángulo que forma con el vector $(1, 5)$.

11. Transfórmese en producto la expresión

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x.$$

12. Calcúlense

$$\operatorname{sen} 105^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ;$$
$$\cos 105^\circ + \cos 15^\circ.$$

13. Hállese el valor de

$$\operatorname{sen} 115^\circ + \cos 75^\circ.$$

14. Demuéstrese que en todo triángulo rectángulo en A se cumple que

$$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \cos B = \cos C.$$

15. Despéjese x en la ecuación

$$y = k \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{m}.$$

16. Resuélvase el sistema

$$\operatorname{sen} x + \cos y = \sqrt{2};$$
$$\sec x + \operatorname{cosec} y = 2\sqrt{2}.$$

17. Hállese el valor del área de un triángulo, con estos datos:

$$A = 30^\circ = B = 45^\circ; \qquad c = 8 \text{ cm}.$$

18. En un triángulo isósceles ABC, con $\widehat{C} = \widehat{B}$, la base es 80 cm y el radio de su círculo inscrito vale 24 cm. Hállense la altura sobre el lado desigual y el perímetro.

19. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es 8 m, y uno de sus ángulos agudos satisface la ecuación

$$2 \operatorname{sen} B \cos B = \operatorname{tg} B.$$

Hállese el área.

20. Sin hacer uso de las tablas, calcúlese la sombra que arroja una torre de 300 m cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 22° 30′.

21. Hállense los módulos y argumentos de los complejos cuyos afijos son los vértices de un cuadrado de perímetro 8 m, centrado en el origen y cuyas diagonales son las bisectrices.

22. Exprésense en forma polar y en forma binómica, respectivamente, los complejos

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \quad \text{y} \quad \sqrt{3}_{\pi/3}.$$

23. Calcúlense la suma, diferencia, producto y cociente de los complejos

$$\sqrt{2}_{45^\circ} \quad \text{y} \quad 1 - i.$$

24. Calcúlese y dése el resultado en forma binómica:

$$\frac{3\,(\cos 63^\circ + i \operatorname{sen} 63^\circ)\cdot 5\,(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)}{\cos 58^\circ + i \operatorname{sen} 58^\circ}.$$

25. Calcúlese el afijo del vector girado 90° del $(2, 2)$.

26. Hállense los vértices de un cuadrado $OA'B'C'$ semejante con el $OABC$, de razón de semejanza 2, sabiendo que está girado 30° respecto del primero, dos de cuyos vértices son

$$O\,(0, 0) \qquad A\,(3, 0).$$

27. El afijo A de un complejo se transforma en el punto $A'(-1, 2)$, después de haber aplicado a A un giro de centro el origen y amplitud 120°. Hállense las coordenadas de A.

28. Usando la fórmula de De Moivre y el desarrollo de Newton, calcúlense $\operatorname{sen} 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$.

29. El vértice A de un hexágono regular centrado en el origen es $A\,(2, 2)$. Calcúlense los otros cinco vértices.

30. Determínense y represéntense los afijos de las seis raíces sextas del complejo $2 - 2i$.

1.5

Autoevaluación A-1

1. Sucede que siendo $|\boldsymbol{v}|=6$ al proyectar $\boldsymbol{v}$ sobre una recta r se obtiene un vector $\boldsymbol{v}'$ tal que $|\boldsymbol{v}'|=3$. Ello indica que el ángulo de $\boldsymbol{v}$ y r es

a) $60°$ ó $120°$;
b) $120°$ ó $240°$;
c) $180 \pm 60° K$, $K=1, 2$;
d) $30° (6K \pm 1)$, $K=0, 1$.

2. La proposición recíproca de: «Un vector determina de forma única su proyección sobre una recta r», es

a) cierta;
b) falsa en todos los casos;
c) depende de la posición del vector;
d) es que la proposición dada no es correcta;

3. Para un determinado vector $\boldsymbol{a}$ se verifica que $|\text{proy}\,\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{a}|$, sobre una determinada recta r, con la que forma un ángulo α. Por eso se puede asegurar que

a) $\alpha=30°$;
b) $\alpha=60°$;
c) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;
d) $\alpha=120°$.

4. El producto escalar de dos vectores que forman un ángulo de $60°$ es nulo. Entonces,

a) uno de ellos, o los dos, son nulos;
b) son perpendiculares:
c) sus módulos son opuestos;
d) no tiene sentido el planteamiento.

5. El producto escalar $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=4$ y $|\boldsymbol{v}|=2$. Esto indica que

a) $|\boldsymbol{w}|\geqslant|\boldsymbol{v}|$;
b) $\cos\varphi=0$;
c) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$ y $\varphi=90°$;
d) $\operatorname{sen}\varphi=\frac{1}{2}\Longrightarrow\varphi=30°$.

6. Vectores ortonormales son

a) dos vectores perpendiculares;
b) dos vectores perpendiculares de igual módulo;
c) dos vectores unitarios perpendiculares;
d) aquéllos que pueden formar base.

7. El resultado de $\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$

a) es el vector unitario de la dirección y sentido de $\boldsymbol{x}$;
b) no se pueden dividir vectores y números;
c) da el coseno del ángulo de $\boldsymbol{x}$ y el eje de $\boldsymbol{i}$;
d) produce el módulo del vector $\boldsymbol{x}$.

8. Siendo $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ una base ortonormal, es cierto que

a) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=0$;
b) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=1$;
c) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$;
d) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$.

9. Las componentes de un vector unitario $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}_2$, que forma un ángulo α con el vector $\boldsymbol{i}$ de una base ortonormal son

a) $(\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$;
b) $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$;
c) $(\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha)$;
d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$.

10. El módulo de un vector es negativo. Eso quiere decir que

a) no es posible;
b) forma un ángulo obtuso con el vector $\boldsymbol{i}$ de la base ortonormal;
c) su extremo está en el segundo o tercer cuadrante;
d) está sobre el semieje negativo de abscisas.

11. Sólo una de las cuatro columnas tiene correctas todas sus expresiones. Márquese.

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

b) $$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}};$$

c) $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2};$$

d) $$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha.$

12. Sólo una de las cuatro fórmulas que se escriben, referibles a un triángulo ABC, es correcta. Descúbrase.

a) $\operatorname{sen} A = \frac{b}{a} \operatorname{sen} B;$

b) $c = 4R \cdot \operatorname{sen} C;$

c) $\frac{\operatorname{sen} B}{b} = 2R;$

d) $\operatorname{sen} A = \frac{a}{b \cdot \operatorname{cosec} B}.$

13. En el triángulo ABC con $\widehat{A} > 90°$, se verifica que

a) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \operatorname{sen} A;$

b) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A;$

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{sen} A.$

14. Dígase cuál de las cuatro fórmulas siguientes es correcta

a) $\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{a+b}{a-b}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$;

b) $\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$;

c) $(a+b)\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}=(a-b)\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}$;

d) $\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\operatorname{cosec}^2\alpha$.

15. Sólo una de las cuatro fórmulas que se proponen para el área de un triángulo es correcta. Márquese.

a) $S=\dfrac{a+b+c}{4R}$;

b) $S=pR$;

c) $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$;

d) $S=b\cdot c\dfrac{\operatorname{sen}A}{2}$.

16. Dado el complejo $z=a+bi$, su módulo es

a) $\sqrt{a^2+(bi)^2}$;

b) $\pm\sqrt{a^2+b^2}$;

c) $\sqrt{a^2-b^2}$;

d) $\sqrt{a^2+b^2}$.

17. El argumento del complejo $0+0i$ es

a) cero;

b) $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{0}{0}$;

c) no está definido;

d) se considera 90°.

18. Los complejos conjugados tienen sus afijos simétricos respecto de

a) el eje real;

b) el origen;

c) el eje imaginario;

d) la bisectriz del primer-tercer cuadrantes.

19. Los complejos opuestos tienen sus afijos simétricos respecto de

a) el eje real;
b) el origen de coordenadas;
c) el eje imaginario;
d) la bisectriz del primer-tercer cuadrantes.

20. El argumento de un número complejo $a+bi$ es

a) b/a;
b) arc tg a/b;
c) $-b/a$;
d) arc tg b/a.

21. Al multiplicar dos complejos resulta otro de módulo 1 y de argumento el doble del del complejo multiplicando. Eso indica que

a) se trata de dos complejos iguales unimodulares;
b) son dos complejos de módulos inversos y afijos alineados con el origen;
c) son dos complejos unimodulares de iguales argumentos;
d) se trata de un complejo elevado al cuadrado.

22. Si al multiplicar dos complejos el resultado es de la forma $0+ai$ es porque

a) los factores son imaginarios puros;
b) los argumentos de los factores eran suplementarios;
c) los argumentos de los factores eran complementarios;
d) uno era unimodular y el otro tenía por módulo a.

23. El número complejo inverso de r_α es

a) $-r_{(1/\alpha)}$;

b) $\left(\frac{1}{r}\right)_\alpha$;

c) $r^{-1}(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)$;

d) $\frac{1}{r}(\cos(-\alpha) - i \operatorname{sen}(-\alpha))$.

24. Uno de los cuatro subconjuntos de $\mathcal{C}$ establecidos a continuación es grupo multiplicativo. Indíquese.

a) $\mathcal{C}_1 = \{a+bi/a^2+b^2=1\}$;

b) $\mathcal{C}_1 = \{r_\alpha/\alpha = 90° K\}$;

c) $\mathcal{C}_1 = \left\{a+bi/a^2-b^2=\frac{a}{\cos\alpha}\right\}$;

d) $\mathcal{C}_1 = \{r_\alpha/\alpha = 180° K\}$.

25. El lugar geométrico de los afijos de todos los complejos del grupo multiplicativo del ejercicio anterior es

a) el eje real;
b) el eje imaginario;
c) la bisectriz del primer-tercer cuadrantes;
d) la circunferencia de centro en el origen y radio 1.

26. Al multiplicar por i, el complejo r_α se convierte en

a) $r_{-\alpha}$;
b) $(-r)_\alpha$;
c) $r_{(\alpha+\pi/2)}$;
d) $r_{(\alpha-\pi/2)}$.

27. Al dividir por i un complejo, su vector representativo

a) gira $-\pi/2$;
b) gira $\pi/2$;
c) se convierte en su simétrico respecto del eje real;
d) se transforma en su simétrico respecto del origen.

28. Los afijos de las raíces cuartas de 3, en C, forman

a) un triángulo equilátero centrado en el origen;
b) un cuadrado de diagonal $2\sqrt[4]{3}$;
c) un triángulo de lado $\sqrt[4]{3}$;
d) un cuadrado con dos lados sobre los ejes.

29. Si en las n raíces de $\sqrt[n]{1}$ hay dos reales es porque

a) siempre pasa eso con la unidad;
b) n es par;
c) n es impar;
d) el argumento de $1+0i$ es 90°.

30. Si al multiplicar el complejo r_α por el m_β el vector representativo del resultado se mantiene en la recta del vector del multiplicando y su módulo se duplica, es señal de que

a) $\beta=\alpha$ y $m=2$;
b) m_β es el número real 2;
c) $r=m/2$ y $\alpha-\beta=0$;
d) m_β es el imaginario puro $2i$.

31. Hállese el valor que debe darse a m para que los vectores $(m, 3)$ y $(2m, -1)$ sean perpendiculares.

32. Determínese el ángulo que forman los vectores $(\sqrt{3}, 1)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$.

33. Sin hacer uso de tablas ni calculadoras, hállese el valor de sen 15° y de cos 15°.

34. Se sabe que $\operatorname{sen}\varphi = 3/5$. Determínense $\cos 2\varphi$ y $\operatorname{tg} 2\varphi$.

35. Resuélvase la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \cos x$.

36. Calcúlese $\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 15°$.

37. Resuélvase un triángulo ABC con los datos $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 60°$ y $b = 30$ cm.

38. Resuélvase el triángulo cuyos datos son $a = 15$ cm, $b = 10$ cm y $\widehat{C} = 35°$.

39. Calcúlese el módulo y el argumento del complejo $\sqrt{3} - i$.

40. Dados los complejos $z_1 = 3_{120°}$ y $z_2 = 2_{60°}$, calcúlese:

a) $z_1 \cdot z_2$;
b) $z_1 : z_2$;
c) $(z_1)^5$;
d) $\sqrt[3]{z_2}$.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-1

1. *c).*	**7.** *a).*	**13.** *c).*	**19.** *b).*	**25.** *d).*
2. *b).*	**8.** *c).*	**14.** *b).*	**20.** *d).*	**26.** *c).*
3. *c).*	**9.** *b).*	**15.** *d).*	**21.** *b).*	**27.** *a).*
4. *a).*	**10.** *a).*	**16.** *d).*	**22.** *c).*	**28.** *b).*
5. *a).*	**11.** *c).*	**17.** *c).*	**23.** *c).*	**29.** *b).*
6. *c).*	**12.** *d).*	**18.** *a).*	**24.** *a).*	**30.** *b).*

31. Consúltese solución del ejercicio 11.

32. Coincide con el ejemplo 8.

33. Análogo al ejemplo 11.

34. Compruébese con la solución del ejercicio 21.

35. Véase la solución del ejercicio 28 *b).*

36. Coincide con el ejercicio 33.

37. Está resuelto en el ejemplo 12.

38. Pueden concultarse el ejercicio 36 o el ejemplo 14.

39. Véase el ejemplo 17.

40. *a)* -6; *b)* $\dfrac{3}{4} + i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$; *c)* $3^5\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

d) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{60° + 360K}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{60° + 360K}{3}\right)$ $(K = 0, 1, 2)$.

UNIDAD TEMATICA 2

GEOMETRIA METRICA PLANA

2.1. Perpendicularidad

1. *Sistemas de referencia cartesianos ortogonales*
2. *Distancia entre dos puntos*
3. *Diversas formas de la ecuación de una recta*
4. *Perpendicularidad de rectas*
5. *Angulo de dos rectas*
6. *Ecuación normal de la recta*
7. *Distancia de un punto a una recta*
8. *Area del triángulo*

2.2. Transformaciones geométricas

1. *Transformación geométrica*
   - 2.1. Traslación
   - 2.2. El grupo de las traslaciones
   - 2.3. Traslación de ejes
3. *El conjunto de los giros del plano*
   - 3.1. Giro
   - 3.2. El grupo de los giros concéntricos
   - 3.3. La regla y el compás en los giros
   - 3.4. Giro o rotación de ejes
4. *El conjunto de las simetrías axiales del plano*
   - 4.1. Simetría axial
   - 4.2. Producto de simetrías axiales
   - 4.3. Producto de traslaciones, giros y simetrías
5. *Transformaciones y movimientos en el plano*

6. *Homotecia y semejanza*
   6.1. Homotecia
   6.2. El grupo de las homotecias concéntricas
   6.3. Semejanza
7. *Números complejos y transformaciones geométricas*
   7.1. Traslación
   7.2. Giro
   7.3. Homotecia
   7.4. Semejanza

2.3. Ejercicios y problemas de recapitulación

2.4. Autoevaluación A-2

2.1

Perpendicularidad

1. SISTEMAS DE REFERENCIA CARTESIANOS ORTOGONALES

Sea $\mathcal{P}$ el plano afín construido sobre el espacio vectorial $\mathcal{V}_2$, dotado del producto escalar.

Como ya se sabe del curso anterior, una referencia afín en el plano se halla formada por un punto O, llamado origen, y una base $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ del espacio vectorial $\mathcal{V}_2$. Dado un punto P, queda determinado de forma única un vector $\overrightarrow{OP}$, y éste se expresa de una sola manera como combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \boldsymbol{u} + y \cdot \boldsymbol{v}$$

Los números reales x, y se llaman coordenadas cartesianas del punto P en la referencia afín $\{O; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

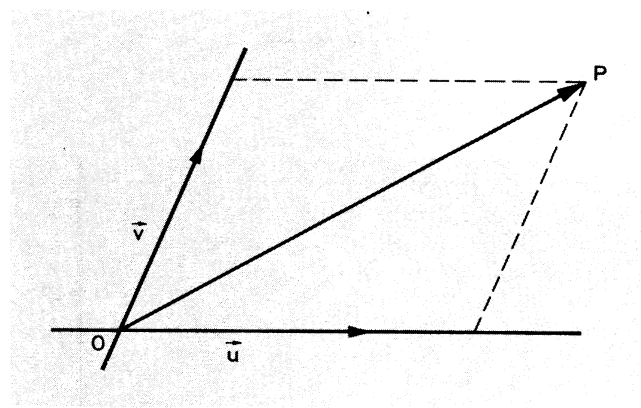


FIG. 2.1.

Desde el momento en que en $\mathcal{V}_2$ está definido un producto escalar, es posible singularizar ciertas bases en el espacio vectorial, precisamente aquéllas que hemos llamado ortonormales.

Una referencia afín $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, en la que $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ es una base ortonormal de $\mathcal{V}_2$, se llamará *sistema de referencia cartesiano ortogonal.*

La recta que pasa por O y tiene por vector director al vector $\boldsymbol{i}$ es el eje de abscisas. Análogamente, la recta por O, de vector director $\boldsymbol{j}$, es el eje de ordenadas. Normalmente nos referiremos a los ejes con la notación «eje OX», «eje OY», respectivamente.

Todos los sistemas de referencia que utilicemos a partir de ahora serán ortogonales, salvo que se indique expresamente lo contrario.

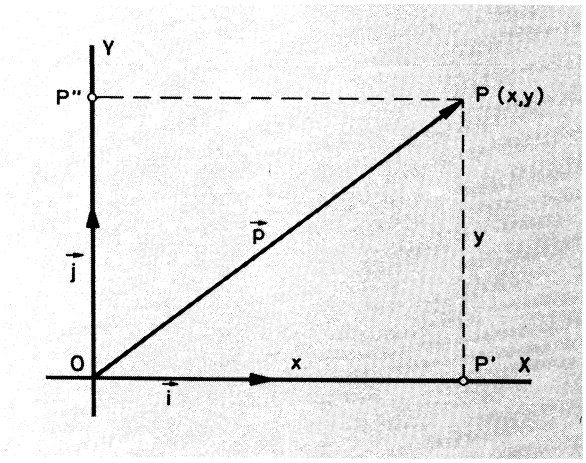


FIG. 2.2.

Las coordenadas (x, y) del punto P no son otra cosa que las longitudes $\overline{OP'}$, $\overline{OP''}$, afectadas del signo correspondiente (Fig. 2.2) y, como ya se vio, coinciden con los productos escalares de $\overrightarrow{OP}$ con $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$:

$$x = \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{i}, \qquad y = \overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{j}$$

Es usual el llamar al vector $\overrightarrow{OP}$ «vector de posición del punto P», y denotarlo por $\boldsymbol{p}$. De acuerdo con esta notación,

Punto P de coordenadas (x, y) $\Longleftrightarrow$ Vector de posición $\boldsymbol{p} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j}$

La razón de elegir referencias cartesianas ortogonales se debe al hecho de que la expresión del producto escalar en una base ortonormal resulta, como ya se ha visto, sumamente simple.

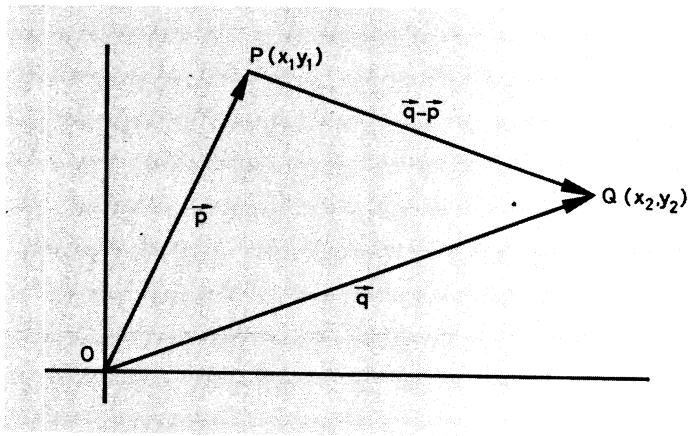


FIG. 2.3.

2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos P y Q es, por definición, el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$d\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

Sean (x_1, y_1) las coordenadas de P, (x_2, y_2) las de Q. En la figura se observa que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es el vector diferencia de los vectores de posición $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{p}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$$

y como

$$\boldsymbol{q} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{p} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$$

resulta

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j}$$

por lo que

$$d\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(\overrightarrow{PQ}) \cdot (\overrightarrow{PQ})}$$

y calculando el producto escalar que figura dentro de la raíz

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad [1]$$

Ejercicio 1

Calcúlense las distancias existentes entre los siguientes pares de puntos:

a) $A\,(2, -3)$, $B(1, 5)$; *b)* $M(3, 0)$, $N(-7, 0)$; *c)* $P(4, 0)$, $Q(0, -3)$.

Ejercicio 2

Justifíquese que el triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(0, 5/2)$ *y* $O(0, 0)$ *es isósceles.*

Ejercicio 3

Demuéstrese que el punto $X(2+2m, 3-m)$ *equidista, cualquiera que sea* m, *de los puntos* $A(1, 1)$ *y* $B(3, 5)$.

3. DIVERSAS FORMAS DE LA ECUACION DE UNA RECTA

Ecuación general

De cursos anteriores se sabe que el conjunto de puntos X cuyas coordenadas cartesianas en una referencia afín verifican una ecuación de la forma:

$$\boxed{\begin{array}{c} Ax+By+C=0 \\ \text{con } A, B \text{ no simultáneamente nulos} \end{array}} \qquad [2]$$

constituyen una recta.

La ecuación [2] suele llamarse *ecuación general de la recta* *.

Forma continua de la recta

Si $X_0(x_0, y_0)$ es un punto de la recta [2], sus coordenadas verificarán la ecuación, por lo que

$$Ax_0+By_0+C=0 \qquad [3]$$

Restando [3] de [2], se obtiene

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad [4]$$

que puede escribirse

$$\frac{x-x_0}{-B}=\frac{y-y_0}{A} \qquad [4']$$

La interpretación de esta última ecuación resulta muy fácil. Obsérvese que el vector $\overrightarrow{X_0X}$ (Fig. 2.4) determinado por el punto X_0 que hemos fijado y por un punto arbitrario X perteneciente también a la recta, es un vector

* Se exige que uno de los dos coeficientes A o B, al menos, sea distinto de cero. Esto se hace para excluir el caso de la ecuación $0\cdot x+0\cdot y+0=0$, que se verifica para todos los puntos del plano, y no corresponde a una recta.

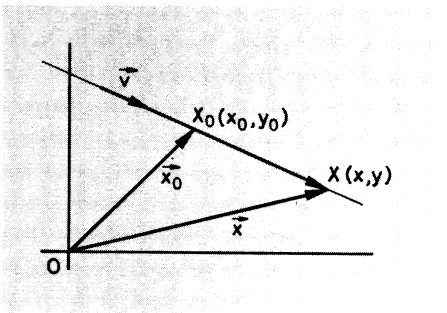


FIG. 2.4.

director de la misma. Las componentes del vector $\overrightarrow{X_0X}$ en la base $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ son

$$(x - x_0,\ y - y_0)$$

y la relación [4] expresa que tales componentes son proporcionales a $-B$ y A. Luego el vector $(-B, A)$ es también un vector director de la recta, y se recae en la interpretación dada en el curso pasado.

Así, pues, una recta que contiene al punto (x_0, y_0) y tiene el vector director $\boldsymbol{v}=(p, q)$, tiene de ecuación:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}} \qquad [4'']$$

Ecuaciones paramétricas

Si llamamos t al valor común de las dos razones de [4'], se puede escribir x e y, coordenadas de un punto genérico * de la recta, en la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + B \cdot t \\ y &= y_0 - A \cdot t \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la recta, que dan las coordenadas de sus puntos en función del parámetro t.

Ecuación vectorial

Llamando $\boldsymbol{v}$ al vector director $(-B, A)$, las dos ecuaciones [5] se reducen a una entre vectores:

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}} \qquad [6]$$

donde $\boldsymbol{x}$ es el vector de posición de un punto cualquiera de la recta, $\boldsymbol{x}_0$ el vector de posición de un punto dado de la misma y $\boldsymbol{v}$ un vector director.

* Un punto cualquiera.

Basta conocer un punto de la recta y el vector director de la misma, o dos puntos, para que la recta quede determinada y se pueda escribir su ecuación en la forma anterior o en cualquiera de las formas equivalentes [2], [4] ó [4'].

Ejercicio 4

Hállense las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) *Recta que pasa por el punto* $A(1, 2)$ *y tiene por vector director el vector* $(-3, 0)$.
b) *Recta que pasa por los puntos* $(1, 1)$ *y* $(2, -3)$.
c) *Recta que pasa por los puntos* $(1, 1)$ *y* $(-3, 1)$.

Veamos ahora que la expresión [4] permite dar una nueva interpretación a los coeficientes A y B de la ecuación general de la recta [2].

La expresión

$$A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

es el producto escalar de los vectores (A, B) y $(x - x_0, y - y_0)$. Este último vector tiene la dirección de la recta.

Como, según [4], el anterior producto escalar es nulo, resulta que los dos vectores considerados son ortogonales, y se puede enunciar:

> Dada la recta
>
> $$Ax + By + C = 0$$
>
> el vector (A, B) es ortogonal al vector de dirección de la misma. El vector (A, B) se llama *vector característico* de la recta.

La ecuación $Ax + By + C = 0$, puesta en la forma equivalente [4], se puede escribir también, llamando $\boldsymbol{a}$ al vector (A, B) y utilizando los vectores de posición $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \qquad [7]$$

Ejercicio 5

Hállese la ecuación de la recta cuyo vector característico es $(1, -2)$, *sabiendo que dicha recta pasa por el punto* $(2, 5)$.

La forma explícita de la ecuación de la recta

Volviendo a la ecuación escrita en la forma [4'], se observa que si B es distinto de cero puede escribirse

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{A}{B} = m$$

La interpretación de la relación anterior es que la razón de la diferencia de ordenadas a la diferencia de abscisas de dos puntos de la recta es una constante característica para cada recta. Esta constante, según se desprende de la figura 2.5, es la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de abscisas.

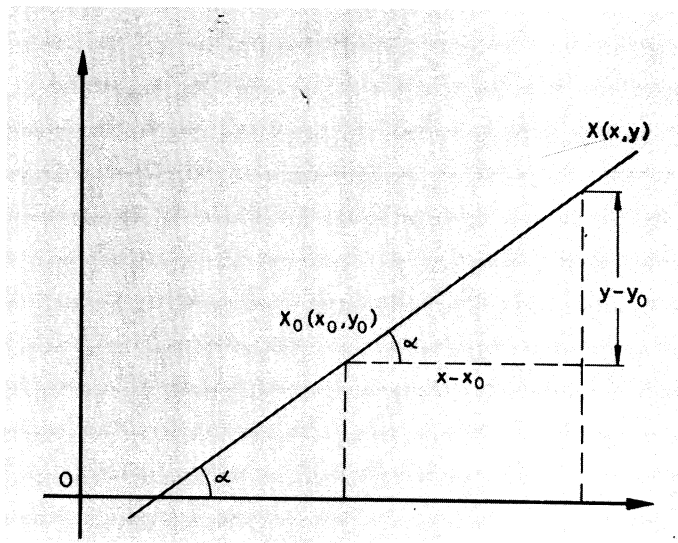


FIG. 2.5.

A dicho valor

$$m = -\frac{A}{B} = \text{tg } \alpha$$

se le llama *pendiente de la recta.*

La ecuación de la recta se puede escribir, ahora, en la forma

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad [8]$$

donde (x_0, y_0) es un punto arbitrario de la recta y m la pendiente.

Ejemplo

Dada una recta cualquiera, por ejemplo, $3x - 5y + 7 = 0$, la determinación de su pendiente es inmediata sin más que despejar y:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}.$$

La pendiente es $\frac{3}{5}$. El término independiente, $\frac{7}{5}$, es la ordenada del

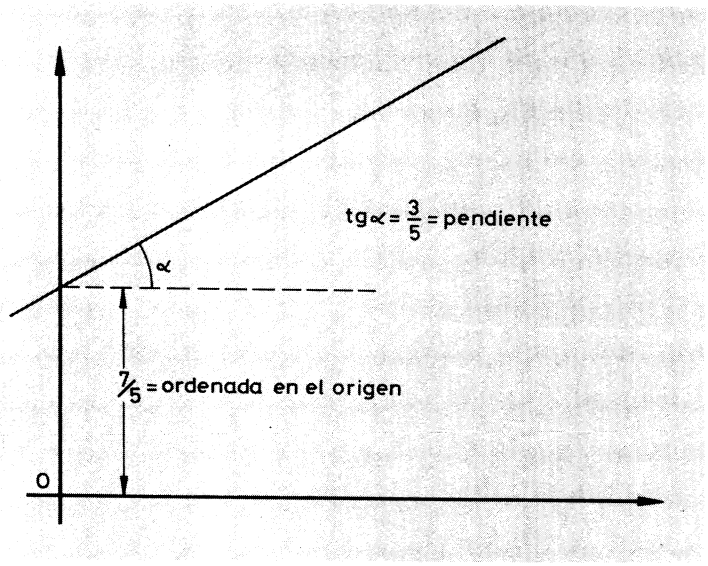


FIG. 2.6.

punto de la recta que corresponde a la abscisa $x=0$, y por ello suele llamarse *ordenada en el origen*. Se representa en la figura 2.6.

La ecuación de la recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es n resulta ser

$$y = mx + n \qquad [8']$$

Ejercicio 6

Hállese la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las siguientes rectas:

a) $x + 2y - 1 = 0$;
b) $2y - 3 = 0$;
c) $x + 3 = -1$;
d) *La recta cuyas ecuaciones paramétricas son*

$$x = -1 + 2t,$$
$$y = 3 - 5t.$$

Ecuación canónica

Ejercicio 7

Compruébese que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, 0)$ *y* $(0, b)$ *se puede escribir en la forma*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Tal ecuación suele denominarse *canónica* y pone de manifiesto los segmentos determinados por la recta sobre cada uno de los ejes. Por supuesto la recta en este caso no debe pasar por el origen.

Ejercicio 8

Hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) *y determina sobre el eje OX un segmento doble del determinado por dicha recta sobre el eje OY.*

4. PERPENDICULARIDAD DE RECTAS

La condición de perpendicularidad en función de los coeficientes

Dos rectas se dice que son perpendiculares cuando sus vectores de dirección son ortogonales.

Ejemplo 2

Las rectas

$$3x - 2y + 1 = 0$$
$$2x + 3y + 4 = 0$$

son perpendiculares, ya que el vector de dirección de la primera es

$$\boldsymbol{v} = (2, 3)$$

y el de la segunda

$$\boldsymbol{w} = (-3, 2)$$

y

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$$

lo que prueba que los dos vectores son ortogonales.

Obsérvese que si los vectores de dirección de dos rectas son ortogonales, *también lo serán los vectores característicos,* ya que cada uno es ortogonal al vector director correspondiente.

En el ejemplo que estamos considerando, el vector característico de la primera recta es

$$\boldsymbol{a} = (3, -2) \quad \text{(ortogonal a } \boldsymbol{v})$$

y el de la segunda

$$\boldsymbol{b} = (2, 3) \quad \text{(ortogonal a } \boldsymbol{w})$$

Obviamente, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ también son ortogonales entre sí.

De acuerdo con esto, la condición de perpendicularidad de las dos rectas

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

es

$$\boxed{AA' + BB' = 0} \qquad [9]$$

Adviértase que la igualdad [9] no es más que exigir que el producto escalar de los vectores característicos $\boldsymbol{a} = (A, B)$ y $\boldsymbol{b} = (A', B')$, sea nulo.

Ejercicio 9

Determínese el valor que debe dársele a p para que la recta

$$(3 + p)x - 5y + 2 = 0$$

sea perpendicular a la que determina sobre los ejes OX, OY segmentos respectivos iguales a -3 *y* 2.

Ejercicio 10

Justifíquese que la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) *y es perpendicular a la de ecuación* $Ax + By + C = 0$ *es*

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$$

La consideración del vector característico de una recta permite dar otra versión del paralelismo. Recuérdese que en el curso pasado se estableció que la condición de paralelismo de las dos rectas

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

es

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

El hecho de ser $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}$ significa que los dos vectores característicos (A, B) y (A', B') son proporcionales, es decir, tienen la misma dirección, como cabía esperar.

La condición de perpendicularidad en función de las pendientes

Sean dos rectas perpendiculares, ninguna paralela a ninguno de los ejes

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

Se puede despejar y en cada una de ellas, quedando

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}$$

y entonces $m = -\frac{A}{B}$, $m' = -\frac{A'}{B'}$, son las pendientes respectivas.

La condición de perpendicularidad

$$AA' + BB' = 0$$

puede escribirse en la forma equivalente (dividiendo por BB')

$$\frac{AA'}{BB'} + 1 = 0$$

y esta relación no es otra que

$$mm' + 1 = 0$$

o bien

$$m' = -\frac{1}{m}$$

Se puede enunciar:

> Dos rectas perpendiculares tienen por pendientes números que son inversos en valor absoluto, y de signos contrarios.

Así, si una recta tiene por pendiente 2/3, cualquier perpendicular a ella tendrá por pendiente $-3/2$.

Ejercicio 11

¿Cuál es la recta que pasa por $(1, -7)$ *y es perpendicular a la de ecuación* $y = 2x + 1$*?*

Ejercicio 12

Se considera el triángulo ABC de vértices $A(1, 0)$, $B(-2, 5)$ *y* $C(-1, -3)$. *Hállense las ecuaciones de sus alturas y las coordenadas del ortocentro.*

Ejemplo 3

Como aplicación inmediata de la condición de perpendicularidad podemos resolver el problema de hallar la ecuación de la recta mediatriz de un segmento. Recordemos que la mediatriz es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.

Si los extremos del segmento son $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el punto medio M tendrá por coordenadas

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

La pendiente de la recta AB es

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

por lo que la mediatriz tendrá una pendiente inversa en valor absoluto y de signo contrario.

Así, la mediatriz r, del segmento cuyos extremos son $A(1, 3)$ y $B(-3, 5)$, tiene por ecuación:

$$M\left(\frac{1-3}{2}, \frac{3+5}{2}\right)=(-1, 4); \qquad m_{AB}=\frac{5-3}{-3-1}=-\frac{1}{2} \Longrightarrow m_r=2$$

$$r \equiv y-4=2(x+1)$$

5. ANGULO DE DOS RECTAS

Cuando dos rectas se cortan determinan cuatro ángulos, iguales dos a dos (los opuestos por el vértice) y los adyacentes suplementarios.

El problema que planteamos es el de dadas las rectas

$$r \equiv Ax+By+C=0$$
$$r' \equiv A'x+B'y+C'=0$$

calcular el ángulo que forman a partir de los coeficientes de sus ecuaciones. De la figura 2.7 se desprende que el ángulo formado por las dos rectas y el formado por sus vectores característicos es el mismo. Ahora bien, el ángulo de los vectores característicos se obtiene inmediatamente, pues su coseno es igual al producto escalar de ambos vectores dividido por el producto de sus módulos, de manera que

$$\cos\alpha=\frac{AA'+BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

y el problema planteado queda resuelto.

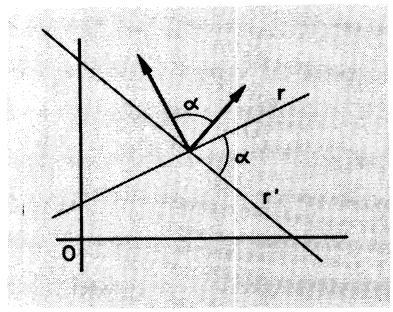


FIG. 2.7.

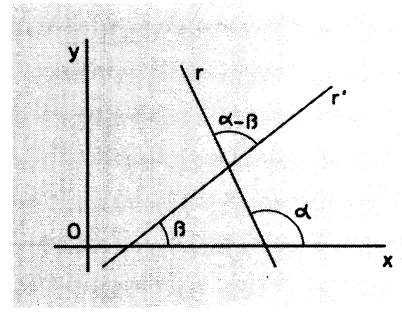


FIG. 2.8.

Ejemplo 4

El ángulo formado por las rectas $x-2y+1=0$, $3x+2y-5=0$ resulta ser el ángulo cuyo coseno vale

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 3+(-2)\cdot 2}{\sqrt{1+4}\,\sqrt{9+4}}=\frac{-1}{\sqrt{65}}=-0{,}124 \implies \varphi=97^\circ\ 7'\ 30''$$

Es posible, no obstante, proceder de otra manera. En la figura 2.8 se pone de manifiesto la relación existente entre el ángulo formado por dos rectas y los ángulos determinados por cada una de ellas con el eje OX, ángulos que pueden calcularse a partir de las pendientes.

En efecto: Si llamamos m a la pendiente de r, y m' a la de r', se tiene:

$$m=\operatorname{tg}\alpha$$
$$m'=\operatorname{tg}\beta$$

El ángulo φ, formado por las dos rectas, es $\alpha-\beta$, y se puede calcular por su tangente

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{m-m'}{1+mm'}$$

Ejemplo 5

Procediendo por este último método, con las dos rectas del ejemplo anterior, se obtiene:

Pendiente de la recta $3x+2y-5=0$: $\quad m=-\frac{3}{2}$

Pendiente de la recta $x-2y+1=0$: $\quad m'=\frac{1}{2}$

Por tanto, llamando φ al ángulo que queremos determinar:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}=-8$$

Buscando en las tablas, se encuentra $\varphi=97^\circ\ 7'\ 30''$, de completo acuerdo con el valor hallado por el otro método.

Ejercicio 13

Dada la recta $2x+y-1=0$, *trácese por el punto* $(1, 2)$ *una recta que forme con la primera un ángulo de* 45°.

Ejercicio 14

Hállese el ángulo de las rectas

$$x+3y-1=0$$
$$x-2y-3=0$$

Ejercicio 15

¿Qué ángulo forman las rectas $x=3$, $y-2=0$?

6. ECUACION NORMAL DE LA RECTA

Como ya es sabido, la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene por vector característico $\boldsymbol{a}$ es

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$$

La anterior ecuación puede escribirse, si dividimos por el número $|\boldsymbol{a}|$,

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$$

y recordando que $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{u}$ es un vector unitario, queda la ecuación

$$\boxed{\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0,\qquad |\boldsymbol{u}|=1} \qquad [10]$$

que se llama *ecuación normal de la recta,* nombre que indica que su vector característico ha sido «normalizado», para que sea de módulo 1.

Supongamos, con origen en O, el vector unitario $\boldsymbol{u}$ característico de la recta r, como aparece dibujado en la figura 2.9.

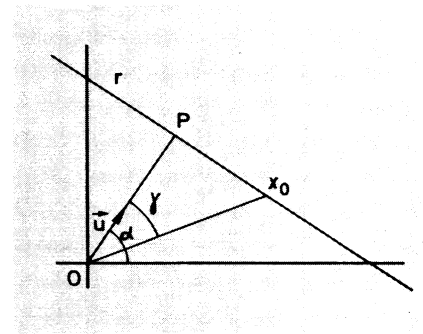


FIG. 2.9.

Las componentes de $\boldsymbol{u}$ son

$$(\cos \alpha,\ \operatorname{sen} \alpha),$$

de manera que la ecuación [10] se escribe:

$$(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \operatorname{sen} \alpha = 0$$

o bien, operando,

$$\boxed{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - d = 0} \qquad [11]$$

donde se ha puesto

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha \qquad [12]$$

Obsérvese que la ecuación [11] es de la forma de la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$; pero, al haber elegido unitario el vector característico, permite dar una interpretación a los coeficientes de x y de y, en la ecuación [11]. Efectivamente, son el coseno y el seno del ángulo que la perpendicular, trazada por O a la recta dada, forma con el semieje OX positivo.

Vamos a dar ahora una interpretación al término independiente d. Obsérvese en [12] que d es el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{x}_0$. Tal producto escalar vale (Fig. 2.9)

$$d = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{x}_0| \cdot \cos \gamma$$

y como $|\boldsymbol{u}| = 1$,

$$d = |x_0| \cdot \cos \gamma$$

lo que indica que d es el cateto OP del triángulo rectángulo OPX_0, y, en consecuencia:

El término independiente de la ecuación normal de una recta, cambiado de signo, representa la distancia del origen de coordenadas a la recta considerada.

Para obtener la ecuación normal, a partir de la forma general de la ecuación de una recta $Ax+By+C=0$, basta dividir toda la ecuación por el módulo del vector característico, cuyo valor es

$$\sqrt{A^2+B^2},$$

con lo que el vector característico se normaliza, quedando de módulo 1.

Ejemplo 6

La ecuación normal de la recta $3x+4y-12=0$ es

$$\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=0$$

de donde se desprende que el ángulo α formado por la recta perpendicular a la dada por O con el semieje OX es tal que

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

y la distancia del origen a la recta es

$$d=\frac{12}{\sqrt{13}}$$

Ejercicio 16

¿Cuál es la distancia del origen a la recta $2x+4y+7=0$?

Quizá, después de realizar el ejercicio 16, resulte extraño el hecho de que la distancia obtenida sea negativa, cuando parece natural que una distancia sea siempre positiva o nula. Sin embargo, se comprenderá mejor este resultado después de reflexionar un poco acerca de la forma de la ecuación normal de la recta.

La relación [12] indica que d es el producto escalar del vector unitario $\boldsymbol{u}$, característico de la recta, y el vector $\boldsymbol{x}_0$, de posición de un punto de la misma. Si la posición relativa de $\boldsymbol{u}$ respecto de r es la representada en la figura 2.9, cualquiera que sea la posición del punto X_0 sobre r el ángulo γ estará comprendido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, con lo que el coseno será positivo, y d positiva, como en el ejemplo 6. En cambio, en el caso del ejercicio 16 las posiciones son las representadas en la figura 2.10. Como se observa, el hecho de no estar «apuntando» el extremo del vector $\boldsymbol{u}$ hacia la recta, hace que el ángulo γ,

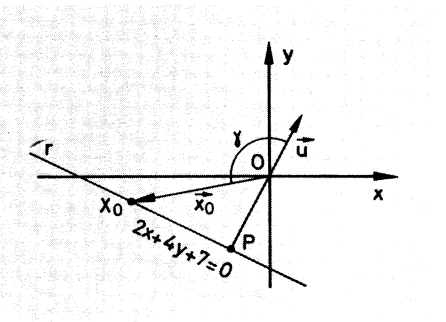


FIG. 2.10.

cualquiera que sea la posición del punto X_0, se halle comprendido entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, por lo que su coseno será negativo, y consiguientemente también d.

Así, pues, en relación con la ecuación normal, la distancia de la recta al origen resulta ser una distancia orientada, es decir, afectada de un signo, signo que indica la «posición» del vector unitario $\boldsymbol{u}$ respecto de la recta. Obsérvese que basta tomar como vector unitario característico $-\boldsymbol{u}$ para que la distancia cambie de signo.

Ejercicio 17

Hállese la ecuación normal de la recta que pasa por los puntos $A(1, -3)$ *y* $B(-2, 1)$. *¿Cuál es la distancia del origen a dicha recta?*

Ejercicio 18

De todas las rectas que pasan por el punto (2, 1), *encuéntrese las que distan una unidad del origen.*

7. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Los resultados obtenidos en el apartado anterior permiten resolver fácilmente el problema de hallar la distancia de un punto cualquiera a una recta.

Supongamos dada la recta r de la figura 2.11:

$$Ax + By + C = 0$$

y el punto $P(x_1, y_1)$.

Si por P se traza la recta s, paralela a r, la distancia de P a r será igual a la distancia que separa a s de r. Pero esta última es la diferencia de las distancias de O a s y de O a r, que se pueden calcular poniendo ambas rectas en forma normal. A continuación se detalla todo el proceso:

Ecuación de la recta a, paralela a r por $P(x_1, y_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

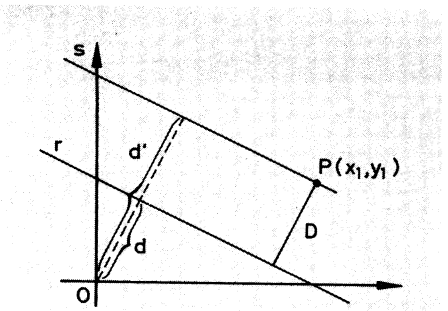


FIG. 2.11.

o bien

$$Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0$$

Ecuación normal de r:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Distancia de O a r:

$$d = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ecuación normal de s:

$$\frac{Ax + By - (Ax_1 + By_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Distancia de O a s:

$$d' = \frac{Ax_1 + By_1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La distancia D buscada es, pues,

$$D = d' - d = \frac{Ax_1 + By_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Obsérvese que la expresión resultante para la distancia se obtiene directamente al sustituir en la ecuación normal de la recta r las coordenadas del punto P. Así, pues, puede enunciarse:

> La distancia de un punto a una recta es el valor que toma el primer miembro de la ecuación normal de dicha recta cuando se sustituyen x, y por las coordenadas del punto en cuestión.

La distancia del punto (3, 4) a la recta $3x + 2y - 1 = 0$ se obtiene así:
Ecuación normal de la recta:

$$\frac{3x + 2y - 1}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0.$$

Sustituyendo en el primer miembro (x, y) por (3, 4) resulta la distancia

$$D = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 1}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{13}}.$$

Ejercicio 19

De un paralelogramo ABCD se conocen los vértices $A(2, 0)$, $B(3, 5)$ *y* $C(-1, 4)$. *¿Cuál es su área?*

Ejercicio 20

Un triángulo isósceles tiene por lados iguales los AB y AC. El vértice A se halla sobre la recta $x + 2y - 1 = 0$; *las coordenadas de B son* $(1, 3)$ *y las de* $C(2, 1)$. *Hallar las coordenadas de A y el área del triángulo.*

Ejercicio 21

Las dos rectas paralelas $2x - 7y + 3 = 0$, $2x - 7y - 4 = 0$ *limitan una banda de plano. ¿Cuál es la anchura de dicha banda?*

Ejercicio 22

Hallar las longitudes de las tres alturas del triángulo cuyos vértices son $A(1, 1)$, $B(2, -3)$ *y* $C(-3, 0)$.

Ejercicio 23

Siendo la bisectriz de un ángulo el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del mismo, dedúzcase que las ecuaciones de las bisectrices de los cuatro ángulos que forman al cortarse las rectas $Ax + By + C = 0$ *y* $Mx + Ny + P = 0$ *son*

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{Mx + Ny + P}{\sqrt{M^2 + N^2}}$$

donde para cada uno de los dos signos se obtiene una bisectriz.

Ejercicio 24

Analícese qué ocurre en el ejercicio anterior cuando las rectas

$$Ax+By+C=0 \quad y \quad Mx+Ny+P=0$$

son paralelas.

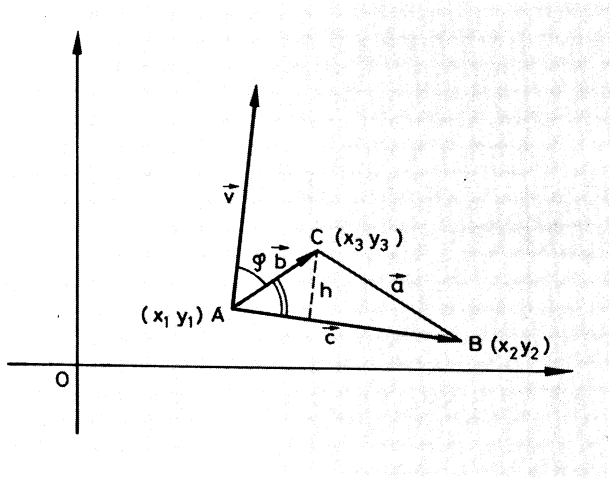


FIG. 2.12.

8. AREA DEL TRIANGULO

Considérese el triángulo ABC de la figura 2.12. Su área es

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|\cdot h;$$

y como

$$h=|\boldsymbol{b}|\cdot \operatorname{sen} A, \qquad S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot \operatorname{sen} A \qquad [13]$$

Por A dibujamos uno de los vectores $\boldsymbol{v}$, de igual módulo que $\boldsymbol{c}$ y ortogonal con él. Los ángulos A y φ son complementarios, de modo que

$$\operatorname{sen} A=\cos\varphi$$

Sustituyendo en la igualdad [13],

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi$$

o bien,

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi \qquad [14]$$

que es la mitad del producto escalar de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{b}$:

$$S=\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}) \qquad [15]$$

Si en lugar de haber considerado el vector auxiliar $\boldsymbol{v}$ se hubiera dibujado $-\boldsymbol{v}$, en vez de φ hubiera aparecido el ángulo $180°+\varphi$; y como

$$\cos(180°+\varphi)=-\cos\varphi,$$

el producto escalar $|-\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(180°+\varphi)$, resultaría de signo contrario y, consecuentemente, el área cambiaría de signo.

¿Qué significado tiene un área negativa? Es consecuencia de la orientación en el plano, cuestión en la que en este curso no entramos. Así, para evitar ese posible signo menos en el área, consideraremos el valor absoluto del producto escalar y la [15] la escribiremos definitivamente y de modo general

$$\boxed{S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}|} \qquad [16]$$

Ejemplo 8

Calcúlese el área del triángulo cuyos vértices son $A(3,0)$; $B(1,4)$ y $C(2,-2)$.

Componentes del vector $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}(-1,-2)$.

Componentes del vector $\boldsymbol{v}$: Como $\boldsymbol{v}$ es el vector girado 90° del $\overrightarrow{AB}(-2,4)$, sus componentes son $\boldsymbol{v}(-4,-2)$.

Entonces,

$$S=\frac{1}{2}(-4,-2)\cdot(-1,-2)=\frac{1}{2}|(-4)\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)|=4 \text{ unidades}$$

cuadradas de área.

Ejercicio 25

Calcúlese el área del triángulo de vértices $A(-1,-1)$, $B(1,4)$ *y* $C(2,-3)$.

Ejercicio 26

Descomponiendo en triángulos, hállese el área del pentágono cuyos vértices son: $A(0,0)$, $B(0,5)$, $C(2,6)$, $D(3,4)$ *y* $E(2,-1)$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.1

1. *a)* $d(A, B) = \sqrt{65}$; *b)* $d(M, N) = 3 - (-7) = 10$;
c) $d(P, Q) = 5$.

2. $d(B, O) = d(B, A)$.

3. $d(A, X) = \sqrt{5m^2 + 5} = d(B, X)$.

4. *a)* $y - 2 = 0$; *b)* $4x + y - 5 = 0$; *c)* $y - 1 = 0$.

5. $(x - 2) - 2(y - 5) = 0$, o sea, $x - 2y + 8 = 0$.

6. *a)* $m = -1/2$; $n = 1/2$;
b) $m = 0$; $n = 3/2$;
c) no están definidas la pendiente ni la ordenada en el origen, por ser la recta perpendicular al eje OX;
d) $m = -5/2$; $n = 1/2$.

7. Escribiendo la ecuación de la recta que pasa por dos puntos queda

$$\frac{x - 0}{a - 0} = \frac{y - b}{0 - b}$$

es decir,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{-b} + 1, \quad \text{de donde} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

8. $x + 2y - 5 = 0$.

9. $p = -21/2$.

10. El vector $(B, -A)$ es ortogonal al (A, B), por lo que ambas son perpendiculares. Que pasa por (x_0, y_0) es evidente.

11. $y + 7 = -\frac{1}{2}(x - 1)$.

12. Altura por el vértice A:

$$x - 8y - 1 = 0;$$

Altura por el vértice B:

$$2x + 3y - 11 = 0;$$

Altura por el vértice C:

$$3x - 5y - 12 = 0;$$

Coordenadas del ortocentro: (91/19, 9/19).

13. $x + 3y - 7 = 0$.

14. 45°.

15. 90°.

16. $d=-\dfrac{7}{\sqrt{20}}$.

17. $\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y+1=0$; $d=-1$.

18. Una solución es $y=1$; otra, $4x-3y-5=0$.

19. Tomando BC como base, la distancia de A al lado BC será la altura del paralelogramo, y el área será igual al producto de la base por la altura. El resultado es: $S=19$ unidades cuadradas.

20. $A(-3/4, 7/8)$. Superficie: 45/16 de unidades cuadradas.

21. $\dfrac{7}{\sqrt{53}}$ es la anchura de la banda.

22. $h_A=\dfrac{1}{2}\sqrt{34}$; $h_B=h_C=\sqrt{17}$. El triángulo es isósceles.

23. Los puntos que están a la misma distancia de una recta que de otra serán tales que al sustituir sus coordenadas en cada una de las ecuaciones normales de las rectas, los primeros miembros tomarán el mismo *valor absoluto* (recuérdese que las distancias son orientadas, y vienen afectadas de un signo). Por eso hay dos posibilidades: o bien

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{Mx+Ny+P}{\sqrt{M^2+N^2}}$$

o un valor es opuesto del otro, con lo que

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{Mx+Ny+P}{\sqrt{M^2+N^2}}$$

y así se obtienen las dos bisectrices.

24. Una de las dos ecuaciones carece de sentido, pues los coeficientes de x e y se anulan, sin ser nulo el término independiente (si las rectas son paralelas pero no coincidentes). La otra ecuación no representa la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas, sino la paralela media de ambas, lugar geométrico de los puntos que equidistan de una y otra.

25. $S=\dfrac{1}{2}\cdot|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}|$.

Componentes de $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}(3, -2)$.

Componentes de $\overrightarrow{AB}(2, 5)$.

Componentes de $\boldsymbol{v}(-5, 2)$.

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}=(-5, 2)\cdot(3, -2)=(-5)\cdot 3+2\cdot(-2)=-19$$

$$S=19/2$$

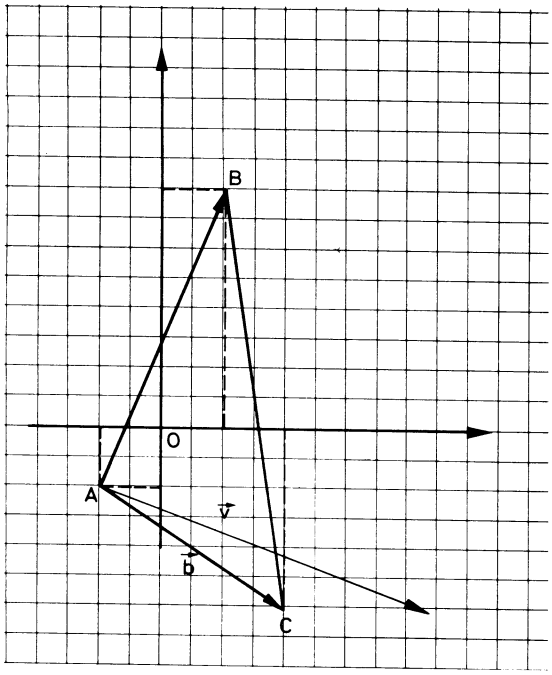


FIG. 2.13.

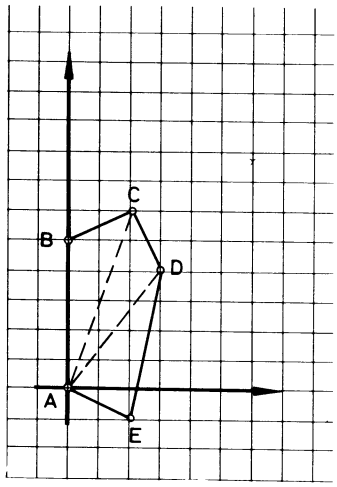


FIG. 2.14.

26. $[ABCDE]=[ABC]+[ACD]+[ADE]$.

Componentes de $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(0,5)\\ \perp\overrightarrow{AC}=(-6,2)\end{matrix}\right\}[ABC]=\frac{1}{2}\,|(0,5)\cdot(-6,2)|=\frac{1}{2}\cdot 10=5$

Componentes de $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AC}=(2,6)\\ \perp\overrightarrow{AD}=(-4,3)\end{matrix}\right\}[ACD]=\frac{1}{2}\,|(2,6)\cdot(-4,3)|=5$

Componentes de $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AD}=(3,4)\\ \perp\overrightarrow{AE}=(1,2)\end{matrix}\right\}[ADE]=\frac{1}{2}\,|(3,4)\cdot(1,2)|=\frac{11}{2}$

$[ABCDE]=5+5+11/2=31/2\ u^2$ de área.

2.2

Transformaciones geométricas

1. TRANSFORMACION GEOMETRICA

De un modo análogo al concepto de *función* en Análisis, existe en Geometría el concepto de *transformación geométrica.* Si se denota por $\mathcal{P}$ el conjunto de puntos del plano, una transformación geométrica es una aplicación de $\mathcal{P}$ en $\mathcal{P}$. Así, a cada punto $A \in \mathcal{P}$ se le hace corresponder un punto A' que se llama imagen de A en la transformación geométrica considerada. Una figura, considerada como conjunto de puntos, tendrá como transformada la figura formada por los transformados de los puntos de la figura original.

La transformación geométrica $t: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ que hace corresponder a cada punto de $\mathcal{P}$ el trasladado según el vector $\boldsymbol{v}$ produce las imágenes de la figura 2.15.

De igual manera que existe la función idéntica de R en $R: y = x$, que actúa dejando invariante cada punto, también se puede considerar la transformación *identidad I,* con la propiedad de que

$$I(A) = A \qquad \forall\, A \in \mathcal{P}$$

De forma análoga a como se define en análisis la función compuesta de dos, f y g,

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

se puede definir la *composición* o *producto* de transformaciones geométricas. Así, si t_1 y t_2 son transformaciones geométricas, y

$$t_1(A) = A', \qquad t_2(A') = A'',$$

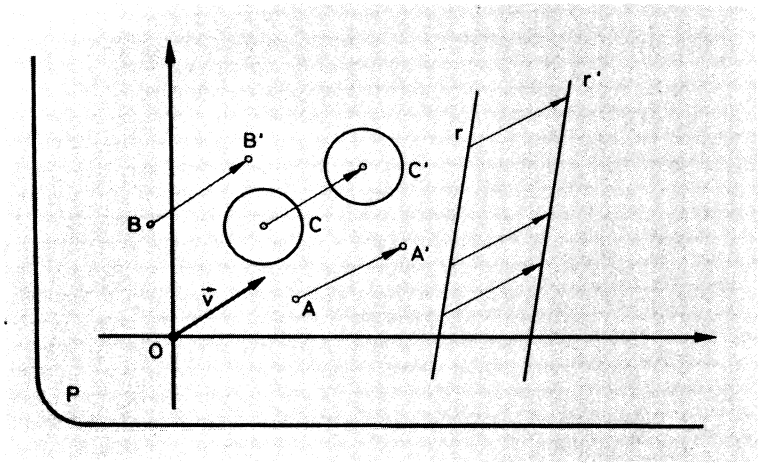


FIG. 2.15.

la transformación producto de ambas es la que «pasa» de A a A'',

$$(t_2 \circ t_1)(A) = t_2[t_1(A)].$$

2. EL GRUPO DE LAS TRASLACIONES DEL PLANO

2.1. Traslación

En la transformación geométrica biyectiva del plano $\mathcal{P}$ sobre sí mismo, tal que, fijado un vector $\boldsymbol{v}$, a cada punto A le hace corresponder otro A', de modo que $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{v}$.

Desde el curso anterior se conocen las ecuaciones de la traslación, que son, para un vector $\boldsymbol{v}(a, b)$,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned}\right\} T \qquad [17]$$

La traslación conserva las distancias en las figuras transformadas.

Así, al aplicar al segmento PQ una traslación que le convierte en el $P'Q'$, sucede que

$$d(P, Q) = d(P', Q') \qquad [18]$$

Ejercicio 27

Justifíquese la igualdad [18], *a partir de las ecuaciones* [17].

Ejemplo 10

La traslación de vector $\boldsymbol{v}(1, -3)$ transforma el triángulo ABC de la figura 2.16 en el $A'B'C'$, según el siguiente cálculo:

$$A' \begin{cases} x' = 2+1=3 \\ y' = 1-3=-2 \end{cases} (3, 2)$$

$$B' \begin{cases} x' = 4+1=5 \\ y' = -1-3=-4 \end{cases} (5, -4)$$

$$C' \begin{cases} x' = 3+1=4 \\ y' = 3-3=0 \end{cases} (4, 0)$$

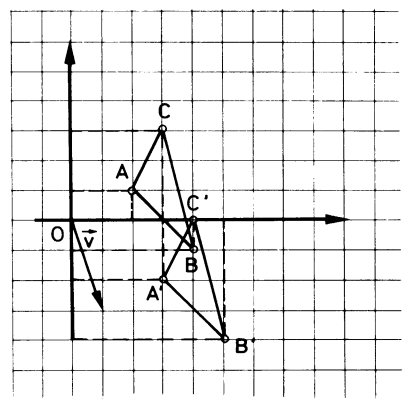


FIG. 2.16.

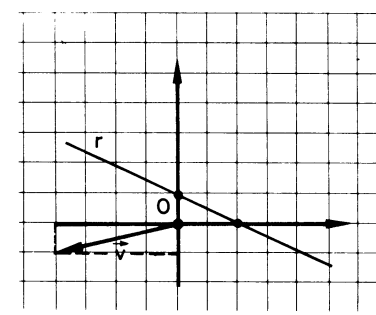


FIG. 2.17.

Ejercicio 28

Trasládese, según $\boldsymbol{v}(-4, 1)$, *la recta r de la figura* 2.17, *estableciendo previamente su ecuación canónica.*

Como se ha podido comprobar en el ejercicio anterior, la traslación de una recta siempre produce otra, paralela a ella. Si dos rectas se cortan formando un ángulo α, sus transformadas se cortarán formando el mismo ángulo, ya que cada una será paralela a su original. Por tanto,

> La traslación es una transformación que conserva los ángulos.

2.2. El grupo de las traslaciones

Sean las traslaciones que se indican, con los vectores-guía que se escriben:

$$T_1(\boldsymbol{v}_1) \quad \text{y} \quad T_2(\boldsymbol{v}_2)$$

Al aplicar a un punto A la traslación T_1, se obtiene otro, A', tal que $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{v}_1$; y, ahora, al aplicar a A' la T_2, se obtiene un punto A'', de modo que $\overrightarrow{AA''} = \boldsymbol{v}_2$.

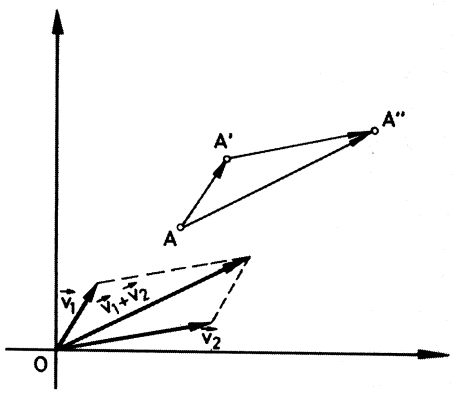


FIG. 2.18.

Es elemental demostrar, como sugiere la figura 2.18, que si al punto A se le aplica la traslación de vector $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, se obtiene directamente el punto A'', porque $\overrightarrow{AA''} = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$. Así, pues, diremos que:

> El producto de las traslaciones T_1 y T_2, de vectores $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ es otra traslación de vector $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$.

Como el conjunto de vectores libres del plano $\mathfrak{V}_2$ tiene estructura de grupo abeliano, respecto de la adición, se puede inferir que el conjunto de las traslaciones del plano $\mathfrak{T}$, con la operación producto antes definida, también es un grupo abeliano.

$$\underset{\text{grupo abeliano}}{(\mathfrak{V}_2,\ +)} \sim \underset{\text{grupo abeliano}}{(\mathfrak{T},\ \circ)}$$

Consecuentemente, tiene las propiedades:

1. Asociatividad:

$$(T_3 \circ T_2) \circ T_1[A] = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)\,[A]$$

2. Elemento unidad:

$$\forall\, T \in \mathfrak{T},\quad \exists^* I \in \mathfrak{T} / T \circ I = I \circ T = T$$

I es la traslación de vector $\mathfrak{0}$.

3. Elementos inversos:

$$\forall\, T \in \mathfrak{T},\quad \exists^* T^{-1} \in \mathfrak{T} / T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$$

Si T es de vector $\boldsymbol{v}$, T^{-1} tiene de vector $-\boldsymbol{v}$.

4. Conmutatividad:

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$$

2.3. Traslación de ejes

Con frecuencia, cuando se tiene una función $Y=f(X)$ respecto a una determinada referencia cartesiana $\{O, XY\}$, es deseable encontrar la expresión de esa función, $y=f(x)$, referida a otros ejes de coordenadas, paralelos a los dados.

Con ello puede conseguirse una expresión más sencilla de la función.

Ejemplo 11

De cursos anteriores se conoce que la función $Y=X^2-6X+11$ es la parábola que se dibuja en la figura 2.19, cuyo vértice es el punto (3, 2).

Si se desea referir su ecuación a otros ejes paralelos a los dados, de origen en el vértice, tendrá que usarse una traslación que convierta

$$\begin{matrix}(3,2) & \xrightarrow{T} & (0,0)\\ (X,Y) & & (x,y)\end{matrix}$$

Entonces,

$$\left.\begin{matrix}X=x+a\\ Y=y+b\end{matrix}\right\| \begin{matrix}0=3+a\\ 0=2+b\end{matrix} \Big\| \rightarrow v(-3,-2) \begin{cases}X=x-3\\ Y=y-2\end{cases}$$

$$Y=X^2-6X+11 \xrightarrow{T} \begin{matrix}y+2=(x+3)^2-6(x+3)+11\\ y=x^2\end{matrix}$$

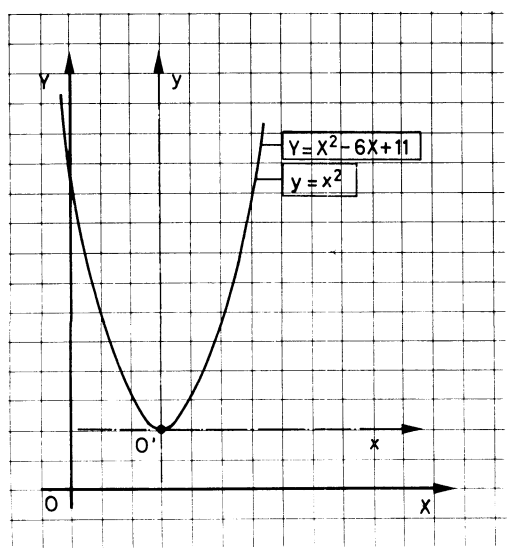


FIG. 2.19.

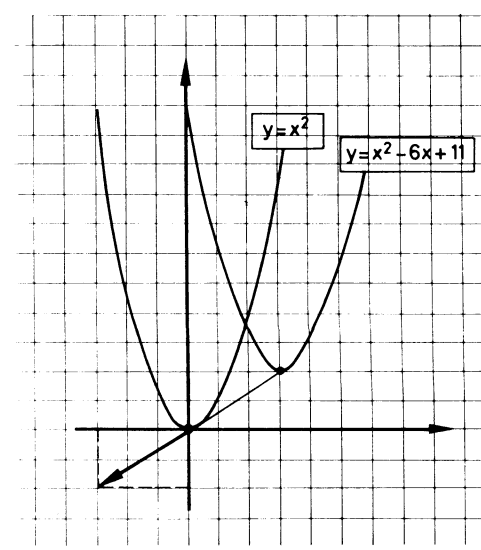


FIG. 2.20.

Adviértase que la llamada «traslación de ejes» hasta un nuevo origen $O'(a, b)$ consiste en realizar una traslación en $\mathcal{P}$, de vector $\boldsymbol{v}(-a, -b)$, como puede comprenderse comparando las figuras 2.19 y 2.20.

Ejercicio 29

Hállese la ecuación de la recta $r \equiv X - 2Y + 1 = 0$, *referida a los ejes de coordenadas de origen en* $O'(-3, 2)$.

3. EL CONJUNTO DE LOS GIROS DEL PLANO

3.1. Giro

Es la transformación geométrica biyectiva del plano $\mathcal{P}$ sobre sí mismo, tal que, fijados un punto O, llamado *centro de giro,* y un ángulo φ, denominado *amplitud del giro,* a cada punto $A \in \mathcal{P}$, le hace corresponder otro A', de modo que

$$(\overline{OA} = \overline{OA'}) \wedge (\widehat{AOA'} = \varphi)$$

La figura 2.21 presenta el transformado del triángulo ABC, según un giro de centro O y amplitud $\varphi = +60°$.

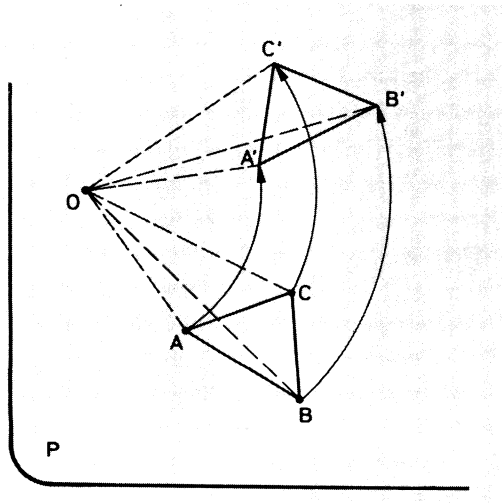


FIG. 2.21.

Tratemos ahora de establecer las ecuaciones del giro. Elijamos en el plano un sistema de referencia cartesiano ortogonal, de manera que el origen coincide con el centro de giro.

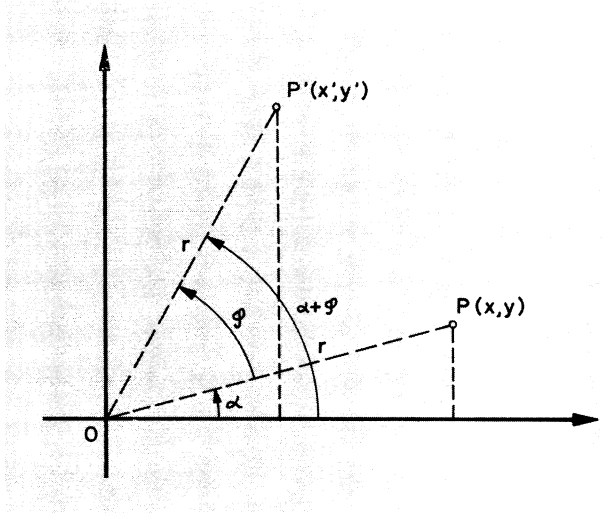


FIG. 2.22.

De acuerdo con la figura 2.22, se puede escribir, llamando r a la distancia $\overline{OP}$,

$$\cos \alpha = x/r; \qquad \operatorname{sen} \alpha = y/r \tag{19}$$

Las coordenadas del punto girado P' son:

$$x' = \overline{OP'} \cos (\alpha + \varphi)$$
$$y' = \overline{OP'} \operatorname{sen} (\alpha + \varphi)$$

o, lo que es igual:

$$\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos (\alpha + \varphi) = r (\cos \alpha \cos \varphi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi) \\ y' &= r \cdot \operatorname{sen} (\alpha + \varphi) = r (\operatorname{sen} \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \cos \varphi) \end{aligned} \tag{20}$$

Sustituyendo las igualdades [19] en las [20] y simplificando, resulta

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \operatorname{sen} \varphi \\ y' &= x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi \end{aligned}\right\} G \tag{21}$$

que son las ecuaciones del giro de centro en el origen y de amplitud φ.

Ejemplo 13

Las ecuaciones del giro de centro O y amplitud $30°$ son:

$$x' = x \cos 30° - y \operatorname{sen} 30° = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - y \cdot \frac{1}{2}$$

$$y' = x \operatorname{sen} 30° + y \cos 30° = x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así, el punto P' transformado del $P(4, -2)$ tiene por coordenadas

$$x' = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-2) \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 1$$

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Ejercicio 30

Demuéstrese que las ecuaciones del giro de centro O y amplitud $90°$ *son*

$$x' = -y$$
$$y' = x.$$

Ejercicio 31

Las ecuaciones de la simetría central de centro O

$$x' = -x$$
$$y' = -y,$$

obtenidas en el curso anterior, ¿se pueden considerar como caso particular de giro?

Ejercicio 32

Escríbanse las ecuaciones del giro de centro O y amplitud $135°$*, y hállese la recta en la que se transforma, mediante dicho giro, la de ecuación* $x + y - 3 = 0$.

Ejercicio 33

Un giro de centro el origen de coordenadas transforma el punto $(3, 4)$ *en el* $(4, 3)$. *Escríbanse las ecuaciones de dicho giro y calcúlese la amplitud del mismo.*

Si el centro de giro, en lugar de ser el origen, fuera el punto $A(a, b)$, se

calculan fácilmente las ecuaciones del giro, usando una traslación adecuada. En este caso, las ecuaciones [21] toman la forma:

$$\begin{aligned} x' - a &= (x-a)\cos\varphi - (y-b)\operatorname{sen}\varphi \\ y' - b &= (x-a)\operatorname{sen}\varphi + (y-b)\cos\varphi \end{aligned} \qquad [21']$$

Ejercicio 34

Escríbanse las ecuaciones del giro de centro en el punto (2, 1) *y amplitud* 270°.

En ocasiones, lo que se conoce es un par de puntos y sus girados y lo que se desea saber son las características del giro que los relaciona. Es sencillo darse cuenta, mirando la figura 2.23, de que el centro de giro es la intersección de las mediatrices de los segmentos original y girado, y el ángulo de giro es uno de los determinados por un punto original, el centro de giro y el punto girado.

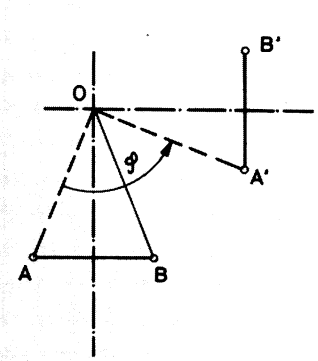


FIG. 2.23.

Ejercicio 35

Hállense el centro y la amplitud de un giro que transforma el punto $A(1, 0)$ *en el* $A'(0, 0)$; *y el* $B(0, 1)$ *en el* $B'(-\sqrt{2}, 0)$.

3.2. El grupo de los giros concéntricos

Sean los giros concéntricos

$$g_1 \begin{cases} \text{centro: } 0 \\ \text{amplitud: } \alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad g_2 \begin{cases} \text{centro: } 0 \\ \text{amplitud: } \beta \end{cases}$$

Al aplicar a un punto A el giro g_1, se obtiene el punto A' y, al girar, según g_2, el punto A' se consigue el A''. La figura 2.24 sugiere la justificación

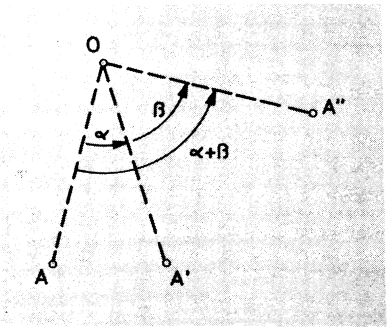


FIG. 2.24.

de que si al punto A se le aplica un giro de centro O y amplitud $\alpha+\beta$, se obtiene directamente el A''. Entonces,

$$g_2[g_1(A)]=A'', \qquad (g_2 \circ g_1)[A]=A''$$

> El producto de dos giros concéntricos es otro giro de igual centro y de amplitud, suma de amplitudes.

El producto de giros en el conjunto $\mathcal{G}$ de los que tienen igual centro tiene las siguientes propiedades:

1. Asociatividad:

$$g_3 \circ (g_2 \circ g_1)\,[A]=(g_3 \circ g_2) \circ g_1\,[A]$$

   La suma de ángulos es asociativa.

2. Elemento unidad:

$$\forall\, g \in \mathcal{G}, \quad \exists^* I \in \mathcal{G} / g \circ I = I \circ g = g$$

   I es el giro de amplitud O.

3. Elementos inversos:

$$\forall\, g \in \mathcal{G}, \quad \exists^* g^{-1} \in \mathcal{G} / g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = I$$

   Si α es la amplitud de g, la de g^{-1} es $-\alpha$.

4. Conmutatividad:

$$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1.$$

A la vista de estas cuatro propiedades puede enunciarse:

> El conjunto de los giros concéntricos, con el producto, es el grupo abeliano
>
> $$(\mathcal{G}, \circ).$$

Adviértase que se trata de los giros «concéntricos». Los giros, en general, no forman grupo multiplicativo.

3.3. La regla y el compás en los giros

Los giros permiten resolver gráficamente, de manera particularmente elegante y sencilla, problemas que, de otra forma, resultarían farragosos o complicados.

Ejemplo 14

Inscríbase en un cuadrado dado un triángulo equilátero de forma que uno de sus vértices coincida con un vértice del cuadrado.

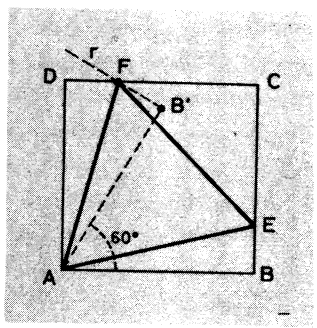


FIG. 2.25.

Solución: Si A es el vértice común al triángulo y al cuadrado, un giro de centro A y ángulo 60° llevará el vértice E del triángulo sobre el vértice F. Este último se obtendrá como intersección del lado CD del cuadrado con el transformado en el giro del lado BC, y a partir de los dos vértices A y F es fácil obtener el E, completando el triángulo.

Ejercicio 36

Hállense las coordenadas de los vértices E y F del triángulo del ejemplo anterior supuesto que los vértices del cuadrado son

$$A(0, 0), \quad B(2, 0), \quad C(2, 2), \quad D(0, 2).$$

Ejemplo 15

Dado un paralelogramo $ABCD$ se pide inscribir en él un rectángulo cuyas diagonales forman un ángulo α dado.

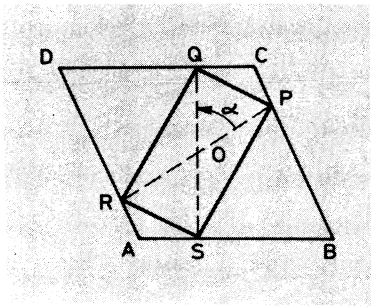


FIG. 2.26.

Solución: Supuesto el problema resuelto (Fig. 2.26), un giro de centro el centro del paralelogramo y ángulo α llevará el vértice P del rectángulo sobre el Q, y este último se obtendrá como intersección del lado CD con el transformado del BC en el giro citado. Una vez hallado Q, es fácil hallar P efectuando el giro inverso, de ángulo $-\alpha$, y los otros dos vértices restantes se obtienen en seguida.

Ejercicio 37

Dadas tres rectas paralelas se pide construir un triángulo equilátero que tenga sus vértices sobre cada una de las rectas dadas.

Ejercicio 38

Indicar cómo construir un cuadrado ABCD conociendo el vértice A y sabiendo que los vértices B y D deben hallarse situados sobre r y s, respectivamente, siendo r y s dos rectas dadas.

3.4. Giro o rotación de ejes

Al igual que se dijo en traslaciones, a veces, una función $Y=f(X)$, escrita en una determinada referencia cartesiana $\{O, XY\}$, tiene una expresión complicada y, sin embargo, en unos ejes girados puede presentar una expresión $y=f(x)$, mucho más sencilla.

Ejemplo 16

La ecuación $3X^2+Y^2-2\sqrt{3}XY-2X-2\sqrt{3}Y=0$, como se verá en la unidad 3, es la de la parábola P, que se representa en la figura 2.27.

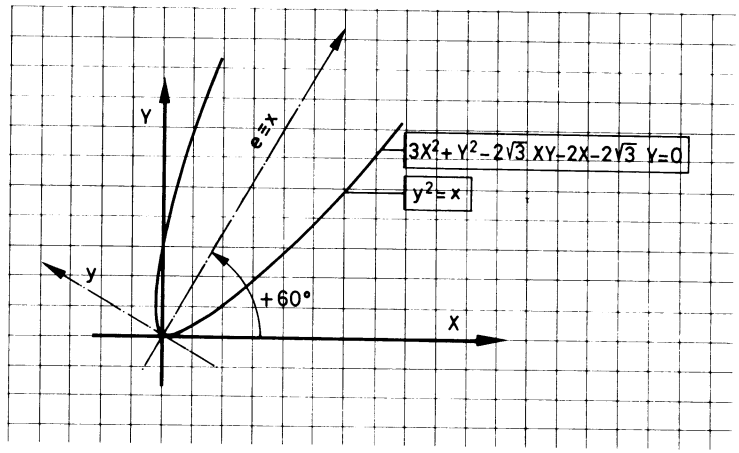


FIG. 2.27.

Si se intenta referir esa complicada ecuación a unos ejes ortogonales, tales que el de abscisas coincida con el eje de la parábola, han de girarse los ejes $+60°$.

Adviértase que esta «rotación de ejes» produce los mismos efectos que un giro en $\mathcal{O}$, de amplitud $-60°$, centrado en el origen (Fig. 2.28); por tanto,

$$x = X\cos(-60°) - Y\,\text{sen}\,(-60°) = \frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,Y$$

$$y = X\,\text{sen}\,(-60°) + Y\cos(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,X + \frac{Y}{2}$$

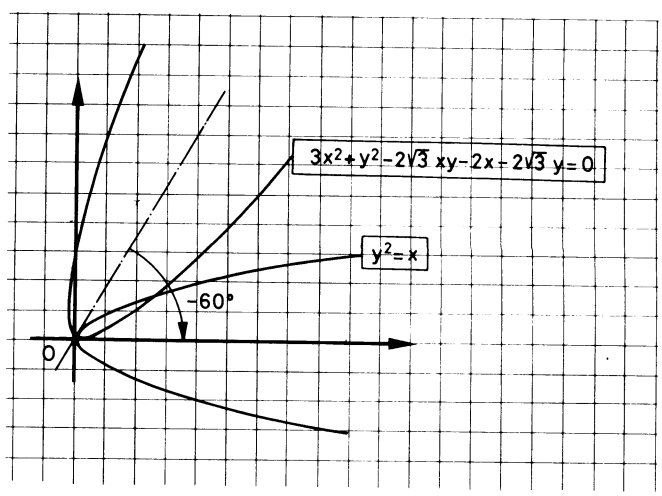


FIG. 2.28.

Despejando X e Y de ese sistema, se obtiene:

$$X=\frac{x-\sqrt{3}y}{2}$$

$$Y=\frac{\sqrt{3}x+y}{2}$$

Sustituyendo en la expresión inicial de la función, operando y reduciendo términos, se consigue la ecuación de la parábola, respecto de la referencia $\{O, xy\}$, que es $y^2=x$.

Ejercicio 39

Determínese la ecuación de la recta $X+Y-2=0$, *cuando los ejes giran* $45°$.

4. EL CONJUNTO DE LAS SIMETRIAS AXIALES DEL PLANO

4.1. Simetría axial

Se define la simetría axial en el plano como la correspondencia en la que, dada una recta fija —llamada *eje de simetría*— a cada punto P se le hace corresponder un punto P' de manera que el eje de simetría sea mediatriz del segmento PP'.

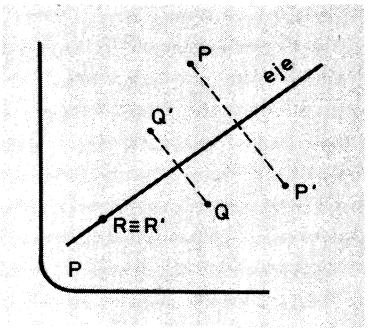


FIG. 2.29.

El eje de simetría divide al plano en dos semiplanos, que se transforman uno en el otro por la simetría. Los puntos del eje son dobles, es decir, se transforman en ellos mismos.

Ecuaciones de la simetría. En el caso de que el eje de simetría es uno de los ejes coordenados, las ecuaciones de la simetría se escriben inmediatamente. Así, se tiene:

Simetría respecto de OX:	Simetría respecto de OY:
$S_x \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$S_y \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

[22]

Ejemplo 17

Cuando el eje es una recta cualquiera, se procede del siguiente modo:

A) Para hallar el simétrico del punto $A(6, 5)$, respecto del eje

$$e = 4x + 3y - 24 = 0.$$

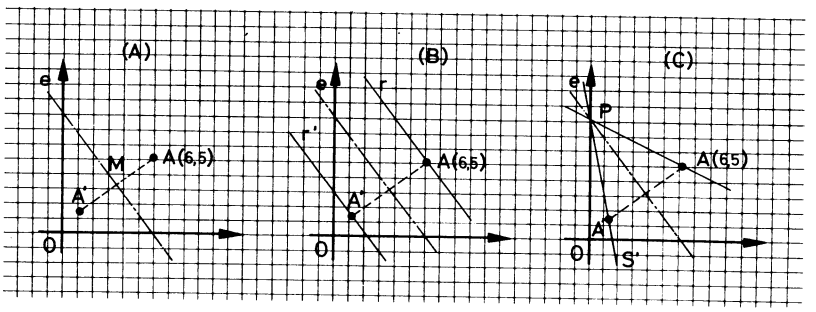


FIG. 2.30.

1. Se determina la ecuación de AA': $m_e = -4/3 \Longrightarrow m_{AA'} = 3/4$

$$y - 5 = 3/4\,(x - 6) \Longleftrightarrow 3x - 4y + 2 = 0$$

2. Se halla M:

$$e \cap \overline{AA'} = M\,(18/5,\ 16/5).$$

3. Se halla $A'(x', y')$:

$$\left.\begin{aligned} 18/5 &= \frac{x' + 6}{2} \Longrightarrow x' = 6/5 \\ 16/5 &= \frac{y' + 5}{2} \Longrightarrow y' = 7/5 \end{aligned}\right\} A'(6/5,\ 7/5)$$

B) Si se trata de una recta paralela al eje de simetría, como la

$$r = 4x + 3y - 39 = 0$$

1. Se toma un punto cualquiera de ella, por ejemplo, el $A(6, 5)$.
2. Se determina su simétrico $A'(6/5, 7/5)$.
3. Se establece la ecuación de r': $m_{r'} = m_e = -4/3$

$$r' \equiv y - 7/5 = -4/3\,(x - 6/5).$$

C) Si la recta $s \equiv x + 2y - 16 = 0$ corta a e, ese punto es «doble» y pertenece a la recta simétrica s'. Basta tomar otro cualquiera $A \in s$, determinar su simétrico A', para poder calcular la ecuación de s', que contiene a los puntos P y A':

$$s' \equiv \frac{y-8}{x-0} = \frac{7/5-8}{6/5-0} \iff s' \equiv 11x + 2y - 16 = 0$$

Ejercicio 40

Determínese la simétrica de la recta $y = 4$, respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrantes.

Ejercicio 41

Hállese el eje de la simetría que transforma a la recta $x + 2y - 2 = 0$ en la $x - 2y - 2 = 0$.

4.2. Producto de simetrías axiales

Dadas dos simetrías axiales, que representaremos por S_1 y S_2, investiguemos la transformación del plano definida de esta manera

$$P \longrightarrow S_2[S_1(P)]$$

Es decir: A cada punto P del plano se le hace corresponder el transformado en la simetría S_2 del transformado de P en la simetría S_1.

Diremos que la transformación resultante es el producto de las simetrías S_1 y S_2 y, como es usual, la denotaremos por $S_2 \circ S_1$.

Ejercicio 42

¿Cuál es el resultado de multiplicar una simetría axial por sí misma?

Para estudiar el producto de simetrías axiales conviene distinguir dos casos, según que los ejes de las simetrías factores sean o no paralelos.

Primer caso: *Producto de simetrías de ejes paralelos*

Como no constituye pérdida de generalidad y se gana en comodidad, establezcamos la situación que representa la figura 2.31, en la que figuran dos simetrías s_1 y s_2 de ejes paralelos, perpendiculares al eje de abscisas.

$$\begin{array}{r} s_1(P) = P' \\ s_2(P') = P'' \\ \hline s_2[s_1(P)] = P'' \\ (s_2 \circ s_1)[P] = P'' \end{array}$$

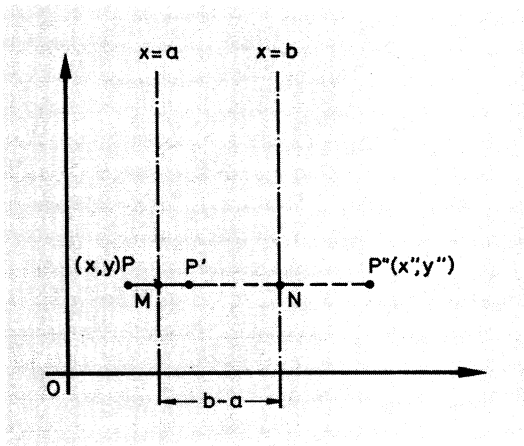


FIG. 2.31.

Es elemental justificar que la transformación que lleva directamente P a P'' es una traslación de vector PP'', se calcula su módulo:

$$|\overrightarrow{PP''}| = \overline{PM} - \overline{MN} + \overline{NP''}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{PM} = \overline{MP'} \\ \overline{NP''} = \overline{P'N} \end{array}\right\} \quad \overline{PM} + \overline{NP''} = \overline{MP'} + \overline{P'N} = \overline{MN}$$

$$|\overrightarrow{PP''}| = \overline{MN} + \overline{MN} = 2\,\overline{MN} = 2\,(b-a)$$

$$s_2 \circ s_1 = T \begin{cases} x'' = x + 2(b-a) \\ y'' = y \end{cases}$$

> El producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación de vector perpendicular a ambos, de sentido del eje de la primera al eje de la segunda y de módulo el doble de la distancia entre ejes.

Obsérvese que el producto de simetrías axiales no es conmutativo, pues, al cambiar el orden, cambia el sentido del vector de la traslación, siendo $s_1 \neq s_2$,

$$\left.\begin{array}{l} s_2 \circ s_1 = T \\ s_1 \circ s_2 = T^{-1} \end{array}\right\} \quad s_2 \circ s_1 \neq s_1 \circ s_2$$

Ejercicio 43

Sin escribir las ecuaciones de las simetrías, determínense las ecuaciones de la traslación producto de las simetrías $s_1 \equiv x + y = 0$ *y* $s_2 \equiv x + y - 4 = 0$.

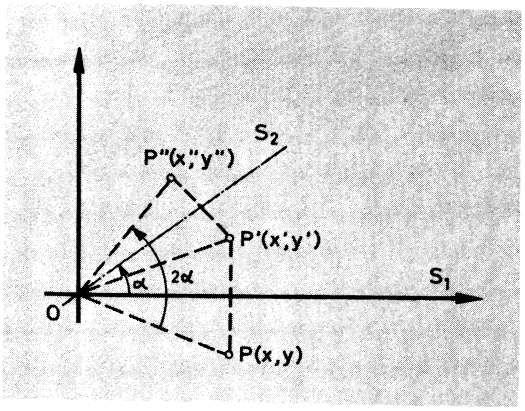


FIG. 2.32.

Segundo caso: *Producto de simetrías de ejes que se cortan*

Consideremos, para mayor comodidad, la situación representada en la figura 2.32.

$$s_1 \cap s_2 = \{\text{origen}\}$$

Puede demostrarse que la transformación que lleva directamente P a P'' es un giro de centro O y amplitud doble del ángulo que forma s_1 con s_2.

$$s_2 \circ s_1 = g \begin{cases} \text{centro: } O \\ \text{amplitud: } 2\alpha \end{cases}$$

> El producto de dos simetrías de ejes que se cortan en O es un giro de centro O y amplitud doble del ángulo que forman el primero con el segundo ejes de simetría.

Ejercicio 44

¿Qué transformación es el producto de la simetría respecto del eje OX y la simetría respecto del eje OY?

4.3. Producto de traslaciones, giros y simetrías

Según lo antes visto, tanto la traslación como el giro se pueden considerar formados por el producto de simetrías axiales. Ello permite un procedimiento muy cómodo para hacer el producto de giros y de giros y traslaciones.

Giro por traslación

Consideremos la transformación producto

$$g_\alpha \circ t_v$$

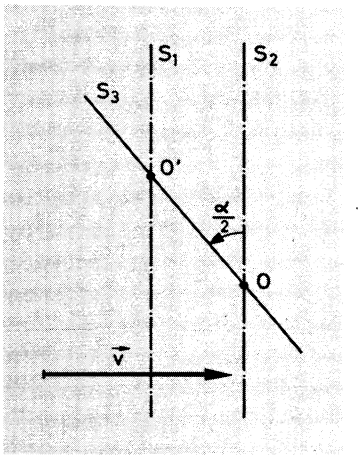


FIG. 2.33.

donde g_α es un giro de centro O y amplitud α, y t_v es la traslación de vector $\boldsymbol{v}$.

Descompongamos en primer lugar la traslación t_v (véase Fig. 2.38) en producto de dos simetrías de ejes paralelos

$$t_v = S_2 \circ S_1$$

de manera que el eje de S_2 pase por el centro de giro O.

A continuación descompongamos el giro g_α en producto de la misma simetría S_2 y de otra S_3, cuyo eje se cortará con el de S_2 en el centro de giro O, formando un ángulo $\alpha/2$ (la mitad del de giro). Se tiene así:

$$g = S_3 \circ S_2$$

Entonces

$$g_\alpha \circ t_v = (S_3 \circ S_2) \circ (S_2 \circ S_1) = S_3 \circ (S_2 \circ S_2) \circ S_1 = S_3 \circ S_1$$

por la asociatividad del producto de simetrías, y al asociar S_2 con S_2, resulta la transformación idéntica, pues el aplicar dos veces seguidas una misma simetría nos lleva cada punto sobre él mismo. En definitiva, hemos obtenido que el producto de la traslación y el giro es un nuevo giro, pues se obtiene como producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan. El centro del nuevo giro es O' y la amplitud vuelve a ser α.

Giro por giro

El procedimiento para tratar este caso es idéntico al anterior. Si los giros que se multiplican son g_α y g_β

$$g_\beta \circ g_\alpha$$

de centros O y O', respectivamente, descompónganse en simetrías

$$g_\alpha = S_2 \circ S_1$$
$$g_\beta = S_3 \circ S_2$$

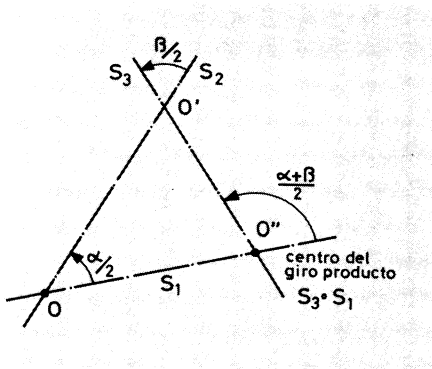


FIG. 2.34.

de manera que la S_2 es común a ambas descomposiciones. Como antes,

$$g_\beta \circ g_\alpha = S_3 \circ (S_2 \circ S_2) \circ S_1 = S_3 \circ S_1$$

y el resultado será un giro, si los ejes de las simetrías S_1 y S_2 se cortan, o una traslación, si resultan paralelos. Esto último ocurrirá cuando $\beta = -\alpha$.

Obsérvese que la simetría S_2 —cuando debe aparecer en ambas descomposiciones— está perfectamente determinada, ya que el eje debe pasar por cada uno de los centros O y O' de los giros.

Ejercicio 45

Hállese el centro del giro producto de g_{60° *y* g_{90°

$$g_{90^\circ} \circ g_{60^\circ}$$

si g_{90° *tiene el centro en* $A(1, 2)$ *y* g_{60° *lo tiene en* $O(0, 0)$.

5. TRANSFORMACIONES Y MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Hasta ahora, hemos considerado unas transformaciones que conservan las distancias: las traslaciones, los giros y las simetrías producen figuras-imagen *iguales* o *congruentes* a las figuras-original. El conjunto de ellos y sus productos se denominan *conjunto de los movimientos del plano.*

Pero, así como las traslaciones y giros, además de las distancias, también conservan los ángulos, las simetrías axiales invierten el sentido de ellos. Por eso, no es posible hacer coincidir algunas figuras simétricas «sin salirse del plano». Indicando esta característica, se acostumbra a clasificar los movimientos del plano en *directos* (mantienen distancias y ángulos) e *inversos* (conservan distancias e invierten ángulos).

Además de estas transformaciones de congruencia, llamadas movimientos, hay otras en el plano que no conservan las distancias, pero sí los ángulos

y la razón de segmentos homólogos. Consecuentemente, las figuras-imagen «conservan la forma pero no el tamaño».

No es extraño que a todas las transformaciones que se llevan descritas, por conservar la forma, se las llame *equiformes.*

Concluyamos diciendo que:

> El conjunto de los movimientos con el producto tiene estructura de grupo; y que los movimientos directos forman un subgrupo multiplicativo de él.

6. HOMOTECIA Y SEMEJANZA

6.1. Homotecia

Homotecia de razón $k \in R - \{0\}$ y centro O es la transformación que hace corresponder a cada punto $A \in \mathcal{P}$, otro $A' \in \mathcal{P}$, sobre la recta OA, tal que la razón simple

$$(OA'A) = \frac{OA'}{OA} = k$$

El centro de homotecia O es el único «punto doble» de la transformación.

Las rectas que contienen el centro de homotecia O se transforman en sí mismas; y las que no pasan por O, en paralelas.

La figura 2.35 sugiere la fácil justificación de lo que se dice.

$$h(r) = r'$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$$

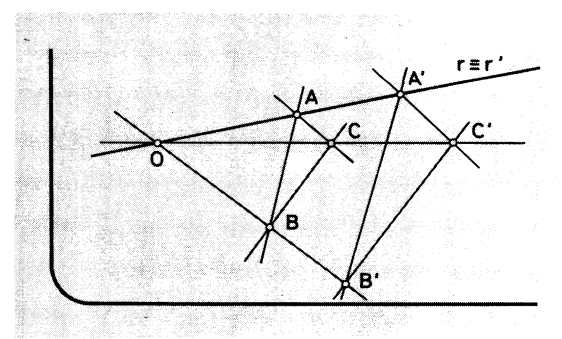


FIG. 2.35.

Ejercicio 46

Sabiendo que el segmento $\overline{OA}$ *tiene doble longitud que el* $\overline{OA'}$, *dígase razonadamente cuál es la razón de la homotecia que se representa en la figura* 2.36.

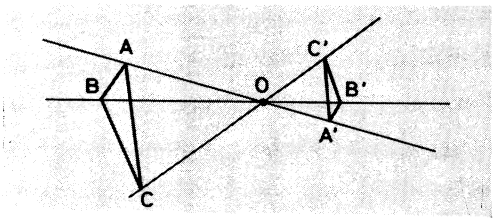


FIG. 2.36.

Como se habrá comprobado con el ejercicio anterior, existen homotecias de $k<0$, y suelen llamarse homotecias *inversas,* dejando el adjetivo de *directas* para cuando $k>0$.

Intentemos calcular ahora las ecuaciones de la homotecia. Sea la homotecia de centro $O(0, 0)$ y razón k, que se representa en la figura 2.37,

$$(OA'A)=\frac{OA'}{OA}=k=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}$$

Entonces,

$$h_0\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \qquad [23]$$

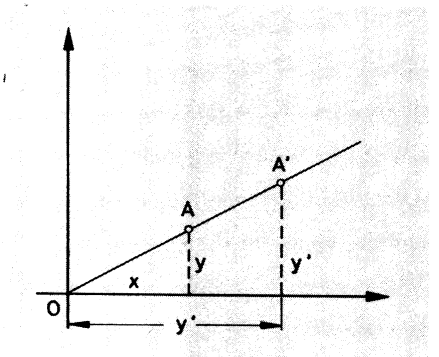


FIG. 2.37.

Ejercicio 47

Sea el triángulo de vértices $O(0, 0)$, $B(0, 4)$ *y* $C(2, 2)$ *y la homotecia*

$$h\begin{cases} O(0, 0) \\ k=3 \end{cases}$$

Determínese el triángulo homotético del OBC.

Ejercicio 48

Dedúzcanse las ecuaciones de la homotecia de centro $P(a, b)$ y razón k.

6.2. El grupo de las homotecias concéntricas

Sean las homotecias

$$h_1 \begin{cases} \text{centro: } O \\ \text{razón: } k_1 \end{cases} \qquad h_2 \begin{cases} \text{centro: } O \\ \text{razón: } k_2 \end{cases}$$

Para un $A \in \mathcal{P}$, sucede:

$$\left.\begin{array}{l} h_1(A) = A' \implies \dfrac{OA'}{OA} = k_1 \\ h_2(A') = A'' \implies \dfrac{OA''}{OA'} = k_2 \end{array}\right\} \times$$

$$h_2[h_1(A)] = A' \implies \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OA''}{OA'} = k_1 \cdot k_2$$

$$(h_2 \circ h_1)[A] = A'' \implies \frac{OA''}{OA} = k_1 \cdot k_2$$

> El producto de dos homotecias concéntricas es otra homotecia del mismo centro y de razón el producto de las razones de las homotecias compuestas.

Resulta muy fácil demostrar que el producto de homotecias de igual centro, $\mathfrak{H}$, tiene las siguientes propiedades:

1. Asociatividad:

$$h_3 \circ (h_2 \circ h_1)[A] = (h_3 \circ h_2) \circ h_1[A].$$

2. Elemento unidad:

$$\forall\, h \in \mathfrak{H}, \quad \exists^* I \in \mathfrak{H} / h \circ I = I \circ h = h;$$

I es la homotecia de razón 1.

3. Elementos inversos:

$$\forall\, h \in \mathfrak{H}, \quad \exists^* h^{-1} \in \mathfrak{H} / h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = I.$$

Si la razón de h es k, la de h^{-1} es $1/k$.

4. Conmutatividad:

$$(h_2 \circ h_1)[A] = (h_2 \circ h_1)[A].$$

A la vista de estas propiedades se concluye:

> El conjunto de las homotecias concéntricas forma un grupo multiplicativo abeliano.

Ejercicio 49

Descúbrase qué es una homotecia, cuando su razón es $k = -1$.

6.3. Semejanza

Obsérvense las tres partes de la figura 2.38. En la primera, un segmento $\overline{AB}$ es transformado por una homotecia de centro O y razón k, en el $\overline{A'B'}$ y, luego, este segmento es trasladado, según $\vec{v}$, hasta $\overline{A''B''}$; en la segunda, la homotecia produce el $\overline{A'B'}$ y, después, un giro transforma este segmento en el $\overline{A''B''}$; en la última, tras la homotecia, una simetría axial de eje e transforma al segmento $\overline{A'B'}$ en el $\overline{A''B''}$. En los tres casos se trata del producto de una homotecia por un movimiento. Pues bien,

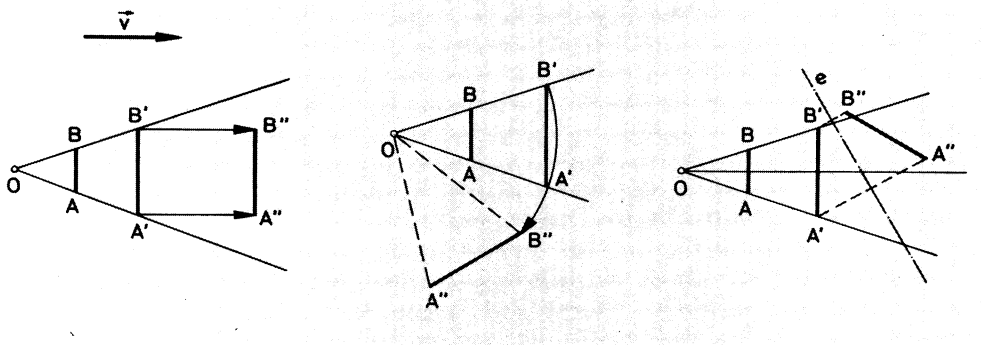


FIG. 2.38.

> *semejanza* es el producto de una homotecia por un movimiento,
>
> $$s = M \circ h$$

Si el movimiento usado es *directo* (traslación o giro), la semejanza se llama *directa;* si, por el contrario, el movimiento es inverso (simetría axial) la semejanza resulta ser *inversa.*

Tratemos de calcular las ecuaciones de la semejanza directa, formada por el producto de una homotecia por una traslación, sobre la figura 2.39,

$$\left.\begin{array}{l} h \left\{\begin{array}{l}\text{centro } (0,0)\\ \text{razón } k\end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} x'=kx\\ y'=ky\end{array}\right. \\ T\text{: vector } (a,b) \left\|\begin{array}{l} x''=x'+a\\ y''=y'+b\end{array}\right. \end{array}\right\} T\circ h \left\{\begin{array}{l} x''=kx+a\\ y''=ky+b\end{array}\right. \qquad [24]$$

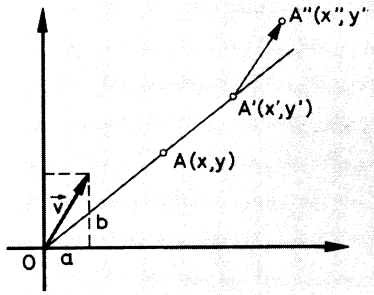


FIG. 2.39.

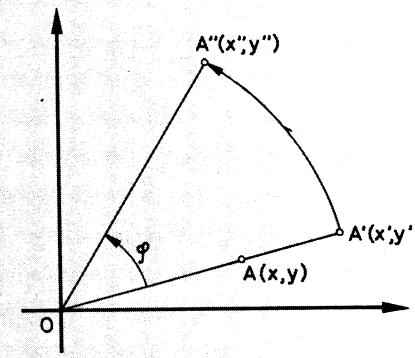


FIG. 2.40.

Las ecuaciones de la semejanza, considerada como producto de una homotecia por un giro, son, según la figura 2.40,

$$h \left\{\begin{array}{l} x' = kx\\ y' = ky\end{array}\right.$$

$$G \left\{\begin{array}{l} x''=x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi\\ y''=x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi\end{array}\right.$$

$$G\circ h \left\{\begin{array}{l} x''=k\cos\varphi x - k\operatorname{sen}\varphi y = px - qy\\ y''=k\operatorname{sen}\varphi x + k\cos\varphi y = qx + py\end{array}\right. \qquad [25]$$

Ejercicio 50

Hállense las ecuaciones de la semejanza formada por el producto de una homotecia por una simetría axial, de centro en $O(0,0)$ y eje OX, respectivamente.

Ejercicio 51

Calcúlense los extremos de un segmento semejante al determinado por $A(0,0)$ y $B(4,4)$, en una semejanza compuesta por la homotecia $h(A;\ k=-2)$ y la traslación de vector $\boldsymbol{v}(4,5)$.

7. NUMEROS COMPLEJOS Y TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS

Considérese una aplicación f del plano complejo o *plano de Gauss* en sí mismo, de manera que a cada número complejo z le corresponda una única imagen z'. La aplicación anterior induce una aplicación geométrica en el plano que al punto P, afijo del complejo z, le hace corresponder P', afijo del complejo z'

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{C} \\ z & \longrightarrow & z' \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{t} & \mathcal{P} \\ P & \longrightarrow & P' \end{array}$$

Nuestro propósito ahora es volver a tratar las transformaciones geométricas antes descritas, desde este punto de vista que, operacionalmente, se muestra muy eficaz.

7.1. Traslación

Posiblemente la transformación más sencilla sea la asociada a la correspondencia de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$, dada por

$$z \xrightarrow{f} z + t = z'$$

o bien

$$z' = z + t$$

donde t es un complejo dado:

$$t = a + bi$$

y $z = x + iy$ es un complejo variable. Si expresamos z' en forma binómica

$$z' = x' + iy'$$

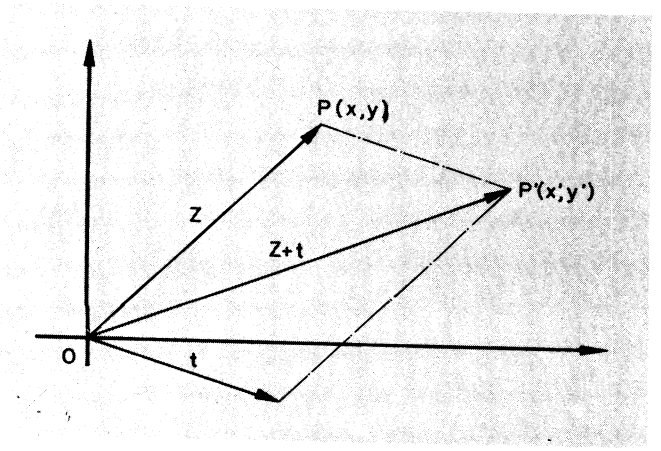


FIG. 2.41.

resulta que la correspondencia anterior, entre z y z', se escribe

$$x' + iy' = (x + iy) + (a + bi) = (x + a) + i(y + b)$$

de forma que la transformación que lleva de z a z', expresada en términos de las partes reales e imaginarias, es

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

y se reconoce inmediatamente una traslación de vector (a, b) que lleva el afijo $P(x, y)$ del complejo z sobre el afijo $P(x', y')$ del complejo z'.

Ejemplo 18

Un triángulo $\widehat{ABC}$ tiene por vértices $A(4, -1)$, $B(2, 5)$ y $C(-1, 3)$. Si los ejes de coordenadas se trasladan paralelamente a sí mismos hasta que el origen coincida con el vértice A, ¿cuáles son las nuevas coordenadas de B y C?

El punto A es el afijo de $4 - i$. Para que pase al origen debe restársele el complejo $4 - i$, por lo que la correspondencia que hay que utilizar es

$$z' = z - (4 - i)$$

Así, el punto B, afijo de $2 + 5i$, se transforma en

$$2 + 5i - (4 - i) = -2 + 6i$$

y sus nuevas coordenadas son $(-2, 6)$. Para el punto C

$$-1 + 3i - (4 - i) = -5 + 4i$$

de modo que sus nuevas coordenadas son $(-5, 4)$.

7.2. Giro

Si a es un complejo unimodular

$$a = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

consideremos la transformación

$$z' = a \cdot z$$

Según se vio al hablar del producto de números complejos, el efecto de multiplicar un complejo z por un complejo unimodular de argumento α era el girar el afijo P del primero un ángulo α en torno al origen O.

Si $z = x + iy$; $z' = x' + iy'$ se tiene:

$$x' + iy' = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (x + iy) = (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha) + i(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)$$

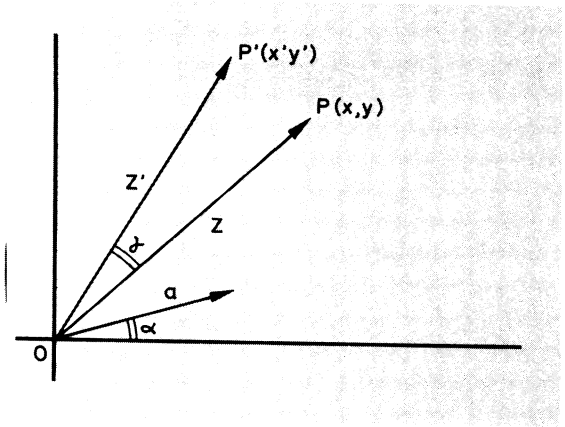


FIG. 2.42.

de manera que

$$x' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$$
$$y' = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$

y volvemos a encontrarnos las familiares ecuaciones del giro de ángulo α en torno al origen como centro de giro.

Combinando traslación y giro es posible elegir como centro del giro cualquier punto del plano.

7.3. Homotecia

Siendo $k \in R - \{0\}$, sea la aplicación de C en C, que hace corresponder a cada complejo z otro z', tal que

$$z' = k \cdot z$$
$$x' + y'i = k(x + yi) \iff \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

Las ecuaciones conseguidas son las de la homotecia de centro $O(0, 0)$ y razón k, que se representaba en la figura 2.37.

7.4. Semejanza

Sea en el plano de Gauss la aplicación f

$$z \xrightarrow{f} z'$$
$$x + yi \longrightarrow x' + y'i = kx + kyi, \quad \forall\, k \in R - \{0\}$$

y también la aplicación g

$$z' \xrightarrow{g} z''$$
$$x' + y'i \longrightarrow x'' + y''i = (x' + y'i) + (a + bi)$$

La composición de ambas funciones produce:

$$\begin{array}{rcl} z & \xrightarrow{g \circ f} & z'' \\ x+yi & \longrightarrow & x''+y''i = kx+a+(ky+b)i \end{array}$$

Ello supone que

$$\left.\begin{array}{l} x''=kx+a \\ y''=ky+b \end{array}\right\} \qquad [26]$$

Las ecuaciones [26] coinciden con las [24]. Efectivamente, se trata de una semejanza que hace corresponder al afijo A del complejo $x+yi$, el A'', correspondiente al complejo $x''+y''i$, como se representa en la figura 2.39, en la que una homotecia y una traslación componen la semejanza.

Ahora, considérense las aplicaciones de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{rcl} z & \xrightarrow{f} & z' \\ x+yi & \longrightarrow & x'+y'i = kx+kyi, \quad \forall\, k \in R-\{0\} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} z' & \xrightarrow{j} & z'' \\ x'+y'i & \longrightarrow & x''+y''i = (x'+y'i)\cdot(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \quad \forall\, \varphi \in R. \end{array}$$

La composición de ambas funciones produce:

$$\begin{array}{rcl} z & \xrightarrow{j \circ f} & z'' \\ x+yi & \longrightarrow & x''+y''i = (kx+kyi)\cdot(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = \\ & & = k\cos\varphi x - k \operatorname{sen}\varphi x + (k\cos\varphi y + k \operatorname{sen}\varphi x)i. \end{array}$$

Ello exige que

$$\left.\begin{array}{l} x''=k\cos\varphi x - k \operatorname{sen}\varphi y \\ y''=k \operatorname{sen}\varphi x + k\cos\varphi y \end{array}\right\} \qquad [27]$$

Obsérvese cómo, las ecuaciones [27] coinciden con las fórmulas [25], que no son otra cosa que las ecuaciones de la semejanza compuesta por la homotecia y el giro, representados en la figura 2.40.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 2.2

27. $d(P', Q') = \sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2} =$

$$= \sqrt{(x_1+a-x_2-a)^2+(y_1+a-y_2-a)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = d(P, Q).$$

28. $r \equiv x/2 + y/1 = 1$;

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - 4 \iff x = x' + 4 \\ y' = x + 1 \iff y = y' - 1 \end{array}\right\} r' \equiv (x' + 4)/2 + (y' - 1)/1 = 1.$$

29. $v(3, -2)$; $\quad r \equiv (x - 3) - 2(y + 2) + 1 = 0.$

30. $x' = x \cos 90 - y \operatorname{sen} 90 = x \cdot 0 - y = -y$;
$y' = x \operatorname{sen} 90 + y \cos 90 = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x.$

31. Sí. La simetría central equivale a un giro de centro el de simetría y amplitud $\pm 180°$.

32. $\left.\begin{array}{l} x' = x(-\sqrt{2}/2) - y(\sqrt{2}/2) \\ y' = x(\sqrt{2}/2) + y(-\sqrt{2}/2) \end{array}\right\} r' \equiv x' = -3\sqrt{2}/2.$

33. $\left.\begin{array}{l} 4 = 3 \cos \varphi - 4 \operatorname{sen} \varphi \\ 3 = 3 \operatorname{sen} \varphi + 4 \cos \varphi \end{array}\right\}$; $\operatorname{sen} \varphi = -7/25 = -0{,}2800 \Longrightarrow \varphi = -16° \; 16'$

34. $x' - 2 = (x - 2) \cdot 0 - (y - 1) \cdot (-1) = y - 1$;
$y' - 1 = (x - 2) \cdot (-1) + (y - 1) \cdot 0 = 2 - x.$

35. Las mediatrices de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ determinan el centro de giro:

$$r \cap r' = G\left(\frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg} \varphi/2 = \frac{A'M}{GM} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\varphi/2 = 67° \; 35' \; 20''; \qquad \varphi = 135° \; 20' \; 40''$$

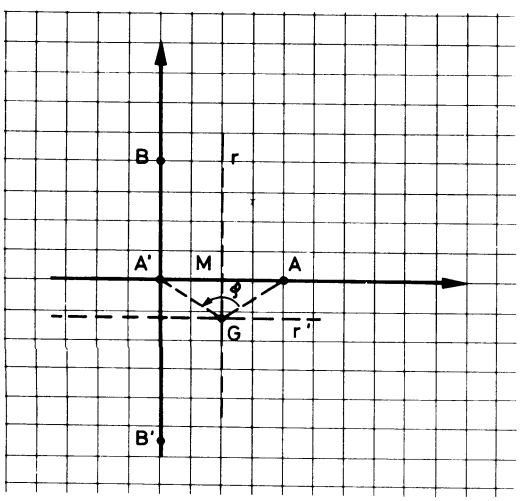


FIG. 2.43.

36. r: girada $+60°$ de CB; $r \equiv x + \sqrt{3}y - 4 = 0$;

$r \cap \overline{DC} = F(4 - 2\sqrt{3}, 2)$;

E: girado $-60°$ de F; $E(2, 4 - 2\sqrt{3})$.

37. 1. Se fija un $B \in s$.

2. Se gira $+60°$, alrededor de B, la recta t, produciéndose t'.

3. $r \cap t' = A$.

4. Se completa el triángulo, con C.

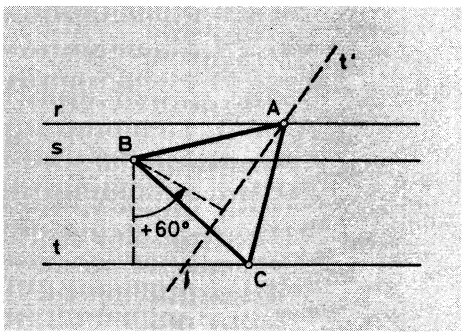


FIG. 2.44.

38. Se gira $+90°$, alrededor de A, la recta r, con lo que B se transforma en D.

Por tanto:

$$r' \cap s = D.$$

Puede completarse el cuadrado. (Existe otra solución.)

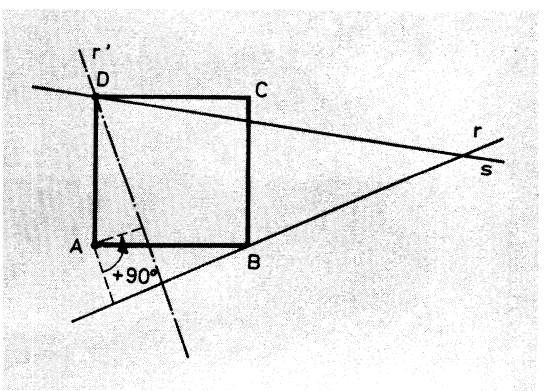


FIG. 2.45.

39. $x = X \cos(-45°) - Y \operatorname{sen}(-45°) = \sqrt{2}/2X + \sqrt{2}/2Y$

$y = X \operatorname{sen}(-45°) + Y \cos(-45°) = -\sqrt{2}/2X + \sqrt{2}/2Y$

$$X = (x-y)/\sqrt{2}$$

$$Y = (x+y)/\sqrt{2}$$

$$r \equiv x - \sqrt{2} = 0.$$

40. Figura 2.46.

$$r \equiv y = 4$$

$$r' \equiv x = 4$$

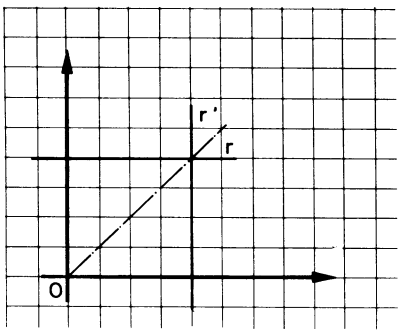


FIG. 2.46.

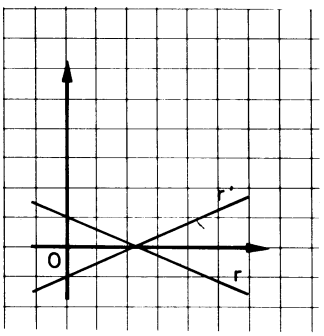


FIG. 2.47.

41. Eje de simetría: $e \equiv y = 0$ (Fig. 2.47).

42. La identidad, ya que $S[S(A)] = A$, $\forall A \in \mathcal{P}$.

43. $|\boldsymbol{v}| = 4\sqrt{2}$; $\boldsymbol{v}(4, 4)$

$$T \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 4 \end{cases}$$

44. Un giro de 180° con centro en el origen de coordenadas, o lo que es igual, una simetría central de centro en $O(0, 0)$.

45. Figura 2.48.

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2 - m_1}{1 + 2m_1} \Longrightarrow m_1 = 5\sqrt{3} - 8;$$

$$m_3 = \frac{m_1 + \operatorname{tg} 75°}{1 - m_1 \cdot \operatorname{tg} 75°} \Longrightarrow m_3 = -3(1 + \sqrt{3});$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &\equiv y - 2 = (5\sqrt{3} - 8)(x - 1) \\ s_3 &\equiv y = -3(1 + \sqrt{3})x \end{aligned}\right\} s_1 \cap s_3 = G;$$

$$G\left(\frac{10 - 5\sqrt{3}}{5 - 6\sqrt{3}}, \frac{15(1 - \sqrt{3})}{5 - 6\sqrt{3}}\right)$$

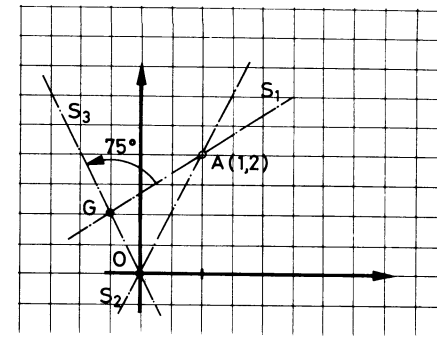


FIG. 2.48.

46. $k=(OA'A)=\dfrac{OA'}{OA}=-\dfrac{1}{2}$.

47. Figura 2.49.

$O'(0, 0)$
$B'(0, 12)$
$C'(6, 6)$.

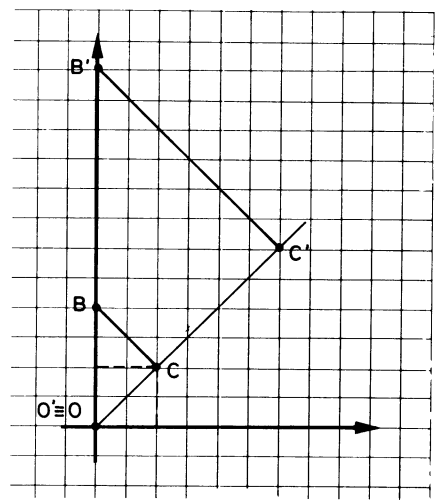


FIG 2.49.

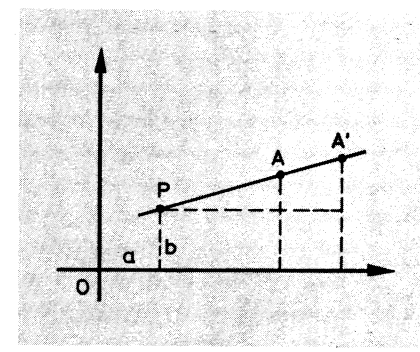


FIG. 2.50.

48. Figura 2.50.

$$k=\frac{PA'}{PA}=\frac{y'-b}{y-b}=\frac{x'-a}{x-a}$$

$$h\begin{cases} x'-a=k(x-a) \\ y'-b=k(x-b) \end{cases}$$

49. Es una simetría central.

50. Escogemos la simetría de eje OX.

$$h \begin{cases} \text{centro: } O(0,0) \\ \text{razón: } k \end{cases} \left\| \begin{array}{l} x' = kx \\ y' = ky \end{array} \right\| s \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -y' \end{cases}$$

$$g = s \circ h \begin{cases} x'' = kx \\ y'' = -ky \end{cases}$$

51.

$$A'' \begin{cases} x'' = -2 \cdot 0 + 4 = 4 \\ y'' = -2 \cdot 0 + 5 = 5 \end{cases}$$

$$B'' \begin{cases} x'' = -2 \cdot 0 + 4 = -4 \\ y'' = -2 \cdot 4 + 5 = -3 \end{cases}$$

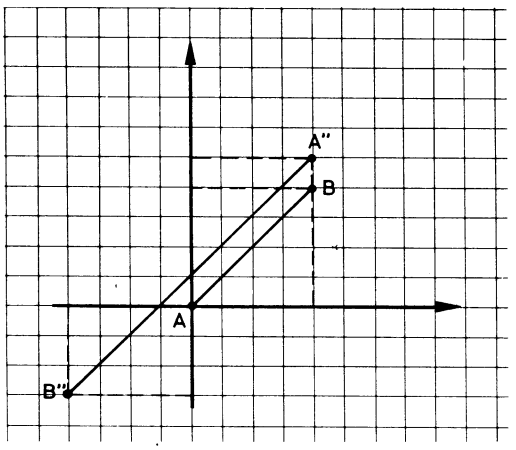


FIG. 2.51.

2.3

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. El lado desigual de un triángulo isósceles tiene de extremos los puntos $A(4, 0)$ y $B(-1, -1)$. Su tercer vértice $C \in r \equiv x - 2y + 8 = 0$. Determínese C y la longitud de la altura h_a.

2. Siendo $O(0, 0)$, $P(1, 2)$ y $Q(3, -1)$, hállense las ecuaciones de las medianas del triángulo OPQ.

3. Calcúlense la pendiente y la ordenada de la recta $6x - 2y - 1 = 0$.

4. Los coeficientes angulares de las rectas r_1 y r_2 son m_1 y m_2, respectivamente. Hállese el ángulo que forman.

5. Determínese el ángulo que forman las rectas $r_1 \equiv 2x + 3y - 13 = 0$ y $r_2 \equiv 3x - 2y - 13 = 0$.

6. Se sabe que las rectas

$$r_1 \equiv x/2 - y/3 = 1$$
$$r_2 \equiv 3x - 4y = 0$$
$$r_3 \equiv y = mx + 1,$$

pertenecen al mismo haz. Calcúlense el centro de ese haz y el valor de m.

7. Siendo $r \equiv 2x - 3y = 5$ y $s \equiv 6x + my = 7$, calcúlese m, tal que:

1.º $r \,//\, s$.
2.º $r \perp s$.

8. Dadas las rectas

$$r \equiv 2x + 3y - 5 = 0 \quad \text{y} \quad s \equiv 5x - ky + 1 = 0,$$

hállese k para que $r \,//\, s$. Luego, calcúlese la distancia entre r y s.

9. Determínese el ángulo que forma la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(1, -2)$ y $B(3, 0)$, con el eje de abscisas.

10. Calcúlese el ángulo que forman las rectas

$$r \equiv 2y - x = 4 \quad \text{y} \quad s \equiv y - 3x = -1.$$

11. Hállese la ecuación de la recta perteneciente al haz

$$\begin{cases} r \equiv x + 4y - 18 = 0 \\ s \equiv x + 2y - 2 = 0 \end{cases},$$

que dista del origen dos unidades.

12. Los lados iguales de un triángulo isósceles están en las rectas

$$3x + 2y - 6 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + 3y + 6 = 0.$$

Determínese la recta soporte de su lado desigual, para que el baricentro del triángulo sea $O(0, 0)$.

13. Los vértices del triángulo MNP son $M(2, 0)$, $N(0, 1)$ y $P(-3, 0)$. Hállense su ortocentro y su circuncentro.

14. Calcúlense el perímetro y el área del cuadrilátero formado por los ejes de coordenadas ortonormales y las rectas $3x + 4y = 12$ y $5x + 6y = 30$.

15. Dada la recta $r \equiv 3x - 5y + 25 = 0$ y los puntos $P(3, 4)$ y $Q(7, 8)$, hállese un punto A, tal que $A \in r$ y $\overline{PA} = \overline{AQ}$.

16. Calcúlese la distancia entre las dos rectas

$$r \equiv 6x - 3y + 5 = 0 \quad \text{y} \quad s \equiv 2x - y - 4 = 0.$$

17. Del paralelogramo $ABCD$ se conocen $A(2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(4, 0)$. Determínense D y el área de la figura.

18. Dados los haces $y = mx + 2$ e $y = 3x - n$, demuéstrese que hay una recta del primero, perpendicular a todas las rectas del segundo. Determínese su ecuación.

19. Dados los puntos $P(0, -1)$ y $Q(1, 2)$, determínense las coordenadas de un punto $A \in r \equiv x + y = 2$, de modo que $AP \perp AQ$.

20. Explíquese qué interpretación gráfica tiene la ecuación $x^2 - y^2 = 0$.

21. Dado el vector $(-2, 3)$, hállense las coordenadas del trasladado de $A(5, 2)$, así como la ecuación de la transformada de la recta $x/3 + y/2 = 1$.

22. Hállense los simétricos del punto $A(2, 5)$ y de la recta $r \equiv 4x - y - 3 = 0$, respecto de la bisectriz del primero y tercer cuadrantes.

23. Dadas las simetrías de ejes $y = 0$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 4$, determínense el centro y la amplitud del giro, formado por el producto de esas cuatro simetrías, en el orden que se establecen.

24. Sean los giros

$$g_1 \begin{cases} O(0,0) \\ +45° \end{cases} \quad \text{y} \quad g_2 \begin{cases} C(6,6) \\ +90° \end{cases}.$$

Determínense el centro y la amplitud del giro $G = g_2 + g_1$, así como $G(A)$, siendo $A(6, 0)$.

25. Resuélvase la ecuación $z^4 - 1 = 0$ en el plano de Gauss. A los afijos-solución se les aplica un giro de centro $O(0, 0)$ y amplitud $+45°$. Determínense los puntos transformados. Luego, se les aplica una traslación de vector $\overrightarrow{OA}$, $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Hállense los puntos trasladados.

26. En una homotecia de centro $O(0, 0)$, los puntos $P(0, 2)$ y $P'(0, 4)$ son homólogos. Calcúlese el homotético de $A(3, 0)$ y también la recta transformada de la $r \equiv 2x + 3y - 6 = 0$.

27. Constrúyase un triángulo conociendo sus tres medianas.

28. Los puntos $P(0, 2b)$ y $Q(0, b)$ se transforman, mediante una semejanza en los $P'(0, 0)$ y $Q'(b, 0)$. Caracterícense el giro y la homotecia, cuyo producto es la semejanza dicha.

29. Sean las rectas

$$r \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

$$s \equiv y = \sqrt{3}\, x$$

$$t \equiv y = 8 - x$$

a) Constrúyase un cuadrado con un lado en el eje de abscisas y con vértices en r y t.

b) $t \cap \overrightarrow{OX} = M$; $t \cap r = A$; $t \cap s = B$. Hállese el valor de la razón simple (MAB).

30. Una homotecia con centro en $O(0, 0)$ transforma el punto $A(2, 1)$ en el A', tal que $A' \in r \equiv x + 3y + 15 = 0$. Calcúlense las coordenadas del punto homotético del $B(3, -1)$ y hállese la razón de homotecia.

2.4

Autoevaluación A-2

1. Una referencia cartesiana ortogonal está definida por:

a) un punto O;
b) dos vectores ortogonales $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$;
c) un origen O y dos vectores ortonormales;
d) dos rectas perpendiculares.

2. Las coordenadas del punto $P(x, y,)$ en un sistema cartesiano ortogonal son:

a) las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ en cualquier base;
b) las componentes de $\overrightarrow{OP}$ en la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ de la referencia;
c) las componentes del vector $x \cdot \vec{O} + y \cdot \vec{P}$;
d) las componentes del vector $P(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$.

3. El vector de posición de un punto P respecto de una referencia cartesiana ortogonal $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ es $-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$. Por eso se puede asegurar que las coordenadas de P son

a) $(-2, 3)$;
b) $(3, -2)$;
c) $(2, -3)$;
d) $(-3, 2)$.

4. La ecuación general de la recta es $Ax + By + C = 0$. Si el coeficiente C es cero, entonces:

a) no está definida la recta;
b) la recta pasa por el origen;
c) la recta es paralela a OX;
d) la recta es perpendicular a OX.

5. Las dos rectas $2x - ay + 5 = 0$, $4x + 6y - 7 = 0$ son paralelas. Por eso puede asegurarse que

a) $a = 0$;
b) $a = 3$;
c) $a = -3$;
d) a puede tomar cualquier valor.

6. La recta perpendicular a la $Ax + By + C = 0$ trazada por el punto (a, b) es

a) $A(x - a) + B(y - b) = 0$;
b) $B(x - a) - A(y - b) = 0$;
c) $A(x - a) - B(y - b) = 1$;
d) $B(x - a) + A(y - b) = 1$.

7. La recta de ecuación canónica $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ tiene por pendientes

a) $\frac{1}{4}$;

b) $-\frac{3}{4}$;

c) $\frac{1}{3}$;

d) $-\frac{4}{3}$.

8. Dos rectas r y s son perpendiculares. Por eso puede afirmarse que sus pendientes

a) son iguales;
b) son opuestas;
c) son inversas y opuestas;
d) su producto es -1.

9. El vector característico de la recta $Ax + By + C = 0$ es

a) su vector director;
b) el vector de posición del origen;
c) cualquier vector ortogonal a la recta;
d) el vector de posición de un punto de la recta.

10. La ecuación normal de la recta $Ax + By + C = 0$ se obtiene

a) dividiendo toda la ecuación por el vector característico;
b) dividiendo C por la distancia al origen;
c) dividiendo toda la ecuación por $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$;
d) dividiendo toda la ecuación por el módulo del vector característico.

11. Si la ecuación normal de la recta $Ax+By+C=0$ resulta ser

$$(x-1)\cos 64^\circ+(y+2)\operatorname{sen} 64^\circ=0$$

se puede asegurar

a) que su distancia al origen es cero;
b) que la recta pasa por $(1,-2)$;
c) que forma un ángulo de 64° con OX;
d) es que ésa no es la ecuación normal.

12. La distancia del origen a la recta $x\cos 64^\circ+y\operatorname{sen} 43^\circ-\operatorname{sen} 30^\circ$ es

a) 0;
b) $\cos^2 64^\circ+\operatorname{sen}^2 64^\circ$;
c) $1/2$;
d) $-\operatorname{sen} 30^\circ$.

13. Las ecuaciones

$$x'=x+\cos\alpha$$
$$y'=y+\operatorname{sen}\alpha$$

representan:

a) un giro de centro en el origen y ángulo α;
b) una traslación de vector unitario;
c) depende del valor de α;
d) no son las ecuaciones de ninguna transformación.

14. En un giro de centro el origen y ángulo 90° la recta $x+y=1$ se transforma en la recta

a) $y=1$;
b) $x+y=-1$;
c) $x-y=-1$;
d) $x=-\sqrt{2}$.

15. En un giro de centro el origen y ángulo α la recta $x+y-1=0$ se transforma en la $x+y+1=0$. Por eso se puede afirmar que

a) el ángulo de giro es 90°;
b) el ángulo de giro es 180°;
c) no existe un giro que transforme la primera recta en la segunda;
d) el ángulo de giro es de 270°.

16. Si un giro de centro A transforma toda recta que no pasa por A en una paralela a ella, entonces

a) el giro nunca transforma una recta en otra paralela;
b) A debe ser el origen;
c) un giro nunca transforma una recta en otra paralela;
d) no es un giro, sino una traslación.

17. En un giro del plano, el segmento determinado por el origen y el punto $A(1, 0)$ se transforma en el determinado por el origen y el punto $B(0, 2)$. Por consiguiente,

a) el centro de giro es el origen;
b) no existe tal giro;
c) el ángulo de giro es de 90°;
d) el punto (2, 0) debe transformarse en (0, 1).

18. Los puntos A y B son simétricos en una simetría de eje r. Por tanto,

a) el eje es la recta AB;
b) el eje es la mediatriz del segmento AB;
c) el eje es la bisectriz del ángulo AOB;
d) el eje es la perpendicular por O a la recta AB.

19. En una simetría axial los puntos A y B se transforman en ellos mismos. Por tanto,

a) el eje es la recta AB;
b) $\overline{OA} = \overline{OB}$;
c) el eje pasa por el origen;
d) el eje es perpendicular a la recta AB.

20. El producto de dos giros del mismo centro es

a) una simetría central;
b) un giro del mismo centro;
c) una traslación;
d) una simetría axial.

21. Al multiplicar dos giros del plano se ha obtenido una traslación. Por eso se puede afirmar que

a) son giros de igual centro;
b) no puede ocurrir que el producto de dos giros sea una traslación;
c) la suma de sus amplitudes es 0 o un múltiplo de 2π;
d) los centros de los giros son simétricos respecto del origen.

22. Al multiplicar tres simetrías axiales se obtiene

a) una traslación;
b) una simetría axial;
c) una simetría central;
d) un giro seguido de una traslación.

23. Si dadas dos rectas existe una infinidad de simetrías axiales que transforman una en la otra, se puede afirmar

a) que es imposible que existan infinitas simetrías con dicha propiedad;
b) que las dos rectas son perpendiculares;
c) que las dos rectas son paralelas;
d) que una de las rectas queda invariante en la simetría de eje la otra recta.

24. La transformación asociada a la aplicación del plano complejo en sí mismo dada por

$$z \longrightarrow z' = \bar{z} \quad \text{(la barra denota el complejo conjugado)}$$

se escribe, cuando $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

por lo que

a) es una traslación;
b) es un giro de centro el origen y ángulo 90°;
c) es una simetría de eje OX;
d) es una simetría central.

25. Para girar 270° en torno al origen el afijo del complejo $-1+2i$ basta

a) hallar su conjugado;
b) multiplicar por i dicho complejo;
c) multiplicarlo por $-i$;
d) cambiar de signo a sus dos componentes.

26. Los ejes OX, OY son diagonales de un rombo, uno de cuyos lados yace sobre la recta $2x+y-2=0$. Hállense las cordenadas de los cuatro vértices.

27. Dadas las rectas $2x+y-1=0$, $x-y+3=0$, $x+my-4=0$, hállese el valor de m para que las tres sean concurrentes.

28. Dadas las rectas $2x+y-3=0$, $x+2y-1=0$, trácese por el punto de intersección de ambas una recta que sea

a) paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes;
b) perpendicular a la citada bisectriz.

29. Hállese la ecuación normal de la recta que pasa por $(1, -2)$ y es paralela a la recta $2x-3y+1=0$.

30. ¿Cuál es la distancia del punto $(7, 2)$ a la recta $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0$?

31. Hállese el área del triángulo $A(2, 1)$, $B(-1, 2)$ y $C(5, -1)$, e interprétese el resultado.

32. Obténganse las ecuaciones del giro de centro el punto $(-1, 3)$ y amplitud 60°. ¿Cuál es el transformado del punto $(2, -1)$?

33. Hállense las ecuaciones de la simetría de eje la recta $2x+3y+4=0$.

34. Hállense las ecuaciones del giro producto de las simetrías S_1 y S_2 de ejes

$$r_1: \; 3x-2y=0; \qquad r_2: \; y=0$$

35. Utilizando el hecho de que un giro es una transformación del plano en sí mismo que solamente tiene un punto fijo (el centro de giro, que se transforma en él mismo), obténgase el centro y la amplitud del giro cuyas ecuaciones son:

$$x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5}$$
$$y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{8}{5}$$

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-2

1.	*c).*	**6.**	*b).*	**11.**	*b).*	**16.**	*a).*	**21.**	*c).*
2.	*b).*	**7.**	*d).*	**12.**	*c).*	**17.**	*b).*	**22.**	*b).*
3.	*a).*	**8.**	*d).*	**13.**	*b).*	**18.**	*b).*	**23.**	*c).*
4.	*b).*	**9.**	*c).*	**14.**	*c).*	**19.**	*a).*	**24.**	*c).*
5.	*c).*	**10.**	*d).*	**15.**	*b).*	**20.**	*b).*	**25.**	*c).*

26. $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -2)$.

27. $m = 2$.

28. *a)* $3x + 3y - 4 = 0$; *b)* $x - y - 2 = 0$.

29. $\dfrac{2x - 3y - 8}{\sqrt{13}} = 0$.

30. $d = 29/5$.

31. El área es cero, pues los tres puntos A, B y C están alineados.

32. $x' = \dfrac{x+1}{2} - (y-3)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$y' = \dfrac{3}{2}(x+1) + \dfrac{y-3}{2}$.

El transformado de $(2, -1)$ es el punto $\left(\dfrac{3+4\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}-4}{2}\right)$

33. $x' = \dfrac{5x - 12y - 16}{13}$;

$y' = -\dfrac{12x + 5y + 24}{13}$.

34. $x' = -\dfrac{5x}{13} + \dfrac{12y}{13}$;

$y' = -\dfrac{12x}{13} - \dfrac{5y}{13}$.

35. El centro es (1, – 2). La amplitud del giro es:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{3}{5} = 53^\circ\ 7'\ 48''.$$

UNIDAD TEMATICA 3

CONICAS

3.1. Circunferencia

1. *Un lugar geométrico*
2. *Rectas y circunferencias*
3. *Intersecciones de dos circunferencias. Potencia*
4. *Eje radical. Centro radical*

3.2. Elipse

1. *Proyección de una circunferencia sobre un plano oblicuo*
2. *Suma de distancias a dos puntos fijos*
3. *El compás elíptico*
4. *Circunferencias directrices y tangentes*
5. *Secciones del cono de revolución*
6. *Orbitas gravitatorias*

3.3. Hipérbola

1. *Diferencia de distancias a dos puntos fijos*
2. *Circunferencias directrices y tangentes*
3. *Secciones del cono*
4. *Proporcionalidad inversa: hipérbolas equiláteras referidas a sus asíntotas*

3.4. Parábola

1. *Distancia a una recta y a un punto*
2. *Tangentes*

3. *Traslación y giro de parábolas*
4. *Secciones del cono*
5. *Trayectorias de lanzamiento*

3.5. Ejercicios y problemas de recapitulación

3.6. Autoevaluación A-3

3.1

Circunferencia

1. UN LUGAR GEOMETRICO

Sea el punto O el origen de coordenadas de una referencia cartesiana ortogonal. Tomado este punto como centro de una circunferencia trazada con el compás, abiertas sus puntas una longitud r, todos los puntos $C(x, y)$ de la curva distarán r del centro (Fig. 3.1).

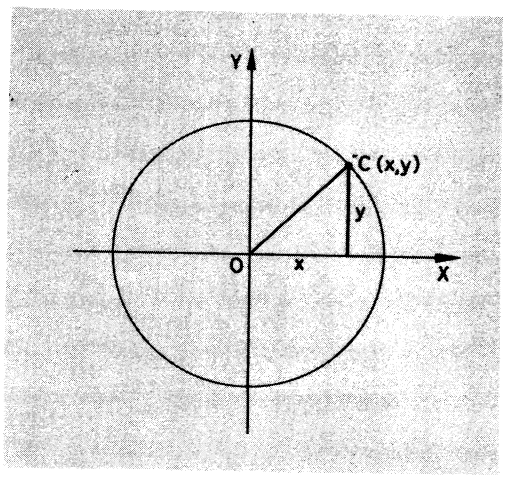


FIG. 3.1.

La ecuación analítica que satisfacen los puntos de la circunferencia mencionada refleja automáticamente la propiedad común:

$$\overline{OC} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado, y por la especial elección del centro de la circunferencia, se obtiene la llamada *ecuación reducida de la circunferencia:*

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad [1]$$

Se utiliza indistintamente la palabra *radio* para designar la distancia común al centro o cualquier segmento que una el centro con un punto de la curva. Del mismo modo, *diámetro* es un segmento interceptado por la circunferencia sobre una recta que pase por el centro o bien la longitud de este segmento, que mide $2r$.

Atendiendo a la ecuación reducida, es claro que los ejes de coordenadas son ejes de simetría de la figura. Basta que el punto (x, y) pertenezca a la curva para poder asegurar que los puntos $(-x, y)$ y $(x, -y)$ también están sobre ella. Pero también es sencillo justificar que cualquier recta diametral es eje de simetría.

Si, en vez de tomar el origen de coordenadas como centro se escoge el punto $O'(a, b)$, la ecuación a satisfacer para un radio dado r es (Fig. 3.2):

$$\overline{O'C} = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

es decir:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

finalmente,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \qquad [2]$$

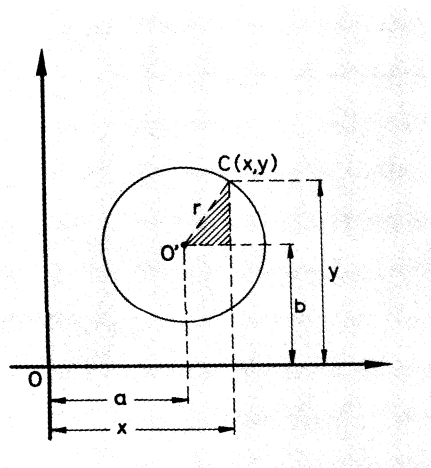


FIG. 3.2.

Ejercicio 1

Hállese la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro el segmento AB, de extremo A(2, 3) y B(6, 11).

Como la circunferencia viene dada por una ecuación de segundo grado en dos variables, podríamos preguntarnos por la condición necesaria para que, recíprocamente, una ecuación de este tipo corresponda a una circunferencia.

La ecuación general de segundo grado es

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad [3]$$

Para que sea una circunferencia de centro en (a, b) y radio r deberán ser proporcionales los coeficientes de [2] y [3]. La proporcionalidad entre los coeficientes cuadráticos aporta las condiciones necesarias:

$$A = 1 \cdot K \qquad B = 0 \cdot K \qquad C = 1 \cdot K$$

$$\Longrightarrow \boxed{A = C \qquad B = O}$$

Si se cumplen estas condiciones, la ecuación [3], dividida por A, queda reducida a

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

que también se puede escribir

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 - \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2} = 0$$

Por tanto, es una circunferencia de centro en $\left(-\frac{D}{A}, \frac{E}{A}\right)$ con tal de que $D^2 + E^2 - AF \geqslant 0$, en cuyo caso, el radio es

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}}$$

Recuadremos las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación general de segundo grado [3] corresponda a una circunferencia real:

$$\boxed{\begin{array}{c} A = C \qquad B = 0 \\ D^2 + E^2 - AF \geqslant 0 \end{array}} \qquad [4]$$

Ejercicio 2

Hállense el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2+y^2+5x-4y+10=0.$$

Como el coeficiente de los términos cuadráticos es distinto de cero y un factor de proporcionalidad no altera la ecuación, se puede imponer que los coeficientes de los términos cuadráticos sean 1. Entonces, la ecuación general de la circunferencia queda sólo con tres coeficientes libres, D, E y F, que con tres condiciones adicionales quedarán, en principio, determinados.

Ejemplo 1

Para determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$ y $C_3(x_3, y_3)$ basta suponer que satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+2Dx+2Ey+F&=0\\
x_1^2+y_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F&=0\\
x_2^2+y_2^2+2Dx_2+2Ey_2+F&=0\\
x_3^2+y_3^2+2Dx_3+2Ey_3+F&=0
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtendrán los valores de D, E, F que determinan la circunferencia.

Ejercicio 3

Hállese la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$, $(1, -1)$ y $(-3, 1)$.

Ejemplo 2

Intentemos hallar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los que «se ve» un segmento dado, AB, de longitud $2r$ bajo un ángulo recto.

Por comodidad de notación se elije como eje, OX, la recta soporte del segmento, de modo que A y B queden simétricos respecto al origen de coordenadas (Fig. 3.3).

Sea $C(x, y)$ un punto tal. Las rectas CA y CB tienen las pendientes $y/(x+r)$, $y/(x-r)$, respectivamente. Para que formen ángulo recto, dichas pendientes han de cumplir

$$\frac{y}{x+r}\cdot\frac{y}{x-r}=-1 \Longrightarrow y^2=-x^2+r^2 \Longrightarrow x^2+y^2=r^2$$

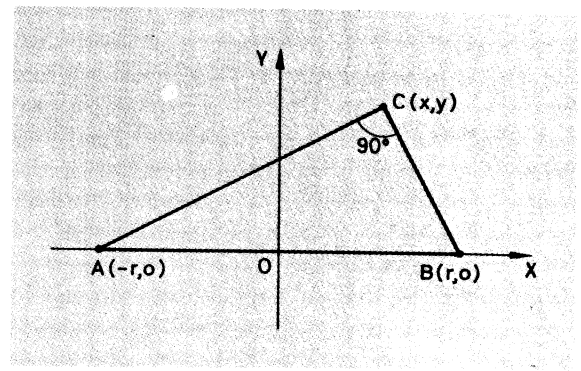


FIG. 3.3.

El lugar geométrico de los puntos C que forman un triángulo rectángulo en C con dos puntos dados A y B es una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

Ejercicio 4

Hállese la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de la figura 3.4.

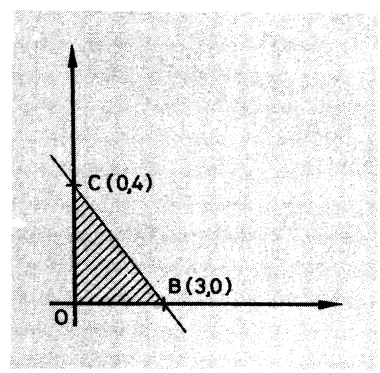


FIG. 3.4.

2. RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

La circunferencia divide el plano en dos regiones. La interior se distingue en que sus puntos $P(p_1, p_2)$ distan del centro menos que la longitud del radio. Contrariamente, los puntos $Q(q_1, q_2)$ de la región exterior distan del centro más que la longitud del radio.

Por tanto cumplen, respectivamente, las siguientes desigualdades:

$$(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 < r^2$$
$$(q_1 - a)^2 + (q_2 - b)^2 > r^2$$

Ejercicio 5

Sea C un punto de la circunferencia de centro en O(a, b) y radio r. Trácese una perpendicular por C al radio $\overline{OC}$. Razónese que se trata de una tangente a la circunferencia.

La ecuación analítica de la tangente por $C(x_0, y_0)$ del ejercicio anterior es de expresión sencilla.

Supongamos que la ecuación de la circunferencia es

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Por derivación implícita calculamos la pendiente en (x_0, y_0)

$$2(x_0-a)+2(y_0-b)y_0'=0 \Longrightarrow y_0'=-\frac{x_0-a}{y_0-b}$$

La ecuación de la recta por (x_0, y_0) con esta pendiente es:

$$y-y_0=-\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0) \Longrightarrow$$

$$\boxed{(y-y_0)\cdot(y_0-b)+(x-x_0)\cdot(x_0-a)=0} \qquad [5]$$

La [5] es la ecuación de la tangente en $C(x_0, y_0)$ a la circunferencia

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Ejercicio 6

Sobre la ecuación [5] *y usando el producto escalar, justifíquese que la tangente a una circunferencia siempre es perpendicular al radio en el punto de contacto.*

El estudio de los puntos comunes de una recta y de una circunferencia conduce a la resolución del sistema.

$$\left.\begin{aligned} y&=mx+b \\ x^2+y^2-r^2&=0 \end{aligned}\right\}$$

(Suponemos la circunferencia centrada en el origen y excluimos la recta $x=0$.)

Sustituyendo y de la primera ecuación en la segunda y operando, se obtiene:

$$(m^2+1)x^2+2mbx+b^2-r^2=0$$

que tendrá dos, una o ninguna solución real según que el discriminante

$$\Delta=(2mb)^2-4(m^2+1)\cdot(b^2-r^2)=(m^2+1)r^2-b^2$$

sea mayor, igual o menor que cero.

Si se consiguen dos soluciones diremos que la recta es *secante* y si tiene una solución que es *tangente;* si ninguna, que es *exterior.*

Ejercicio 7

Decídase la posición relativa de la recta $r \equiv x+y=2$ *y la circunferencia* $x^2+y^2=2$.

Ejemplo 3

Hállense las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia de centro en el punto $(3, 0)$ y radio 3 desde el punto $(-3, 0)$.

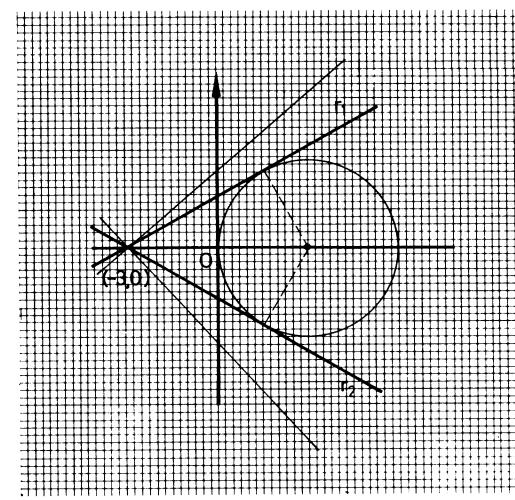


FIG. 3.5.

La ecuación del haz de rectas de centro en el punto $(-3, 0)$, al que pertenecen las tangentes r_1 y r_2, que se buscan, es

$$y-0=m(x+3)$$

La ecuación de la circunferencia es

$$(x-3)^2+(y-0)^2=9$$

Hagamos un sistema con ambas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & y=mx+3m \\ \text{II} & x^2+y^2-6x=0 \end{array}\right\}$$

Resolvamos, en función de m, sustituyendo I en II.

$$x^2+(mx+3m)^2-6x=0$$
$$(m^2+1)x^2+(6m^2-6)x+9m^2=0$$

De todas las rectas del haz nos interesan las que son tangentes a la circunferencia; por tanto, obligaremos a que sólo haya una solución, igualando a cero el discriminante de esa ecuación

$$\Delta = (6m^2 - 6)^2 - 4(m^2 + 1)9m^2 = 0$$

$$-108m^2 + 36 = 0 \Longrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Las dos rectas buscadas son

$$r_1 \equiv y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3)$$

$$r_2 \equiv y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3)$$

Ejercicio 8

Hállese la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, 5)$ *y* $(2, 3)$, *y es tangente al eje de abscisas.*

Ejercicio 9

Establézcase la ecuación de la circunferencia de centro $(2, 3)$ *y que es tangente al eje de ordenadas.*

3. INTERSECCIONES DE DOS CIRCUNFERENCIAS. POTENCIA

Sean las circunferencias

$$\left.\begin{aligned} C_1 &\equiv x^2 + y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0 \\ C_2 &\equiv x^2 + y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema que tiene dos, una o ninguna solución, según que las circunferencias sean secantes, tangentes o no tengan ningún punto común.

Para resolver el sistema [6] se le puede sustituir por uno más cómodo, equivalente con él, que resulta de cambiar una de las ecuaciones por la diferencia de las dos. Con ello se tiene la ventaja de que una ecuación sea lineal, es decir, la ecuación de una recta.

$$\left.\begin{aligned} C_1 &\equiv x^2 + y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0 \\ R &\equiv 2(D_1 - D_2)x + 2(E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [6']$$

Este sistema sigue teniendo las mismas soluciones que pudiera tener el [6].

Ejemplo 4

Las circunferencias

$$C_1 \equiv x^2+y^2=9$$
$$C_2 \equiv x^2+y^2-8x-8y+15=0$$

son las de la figura 3.6.

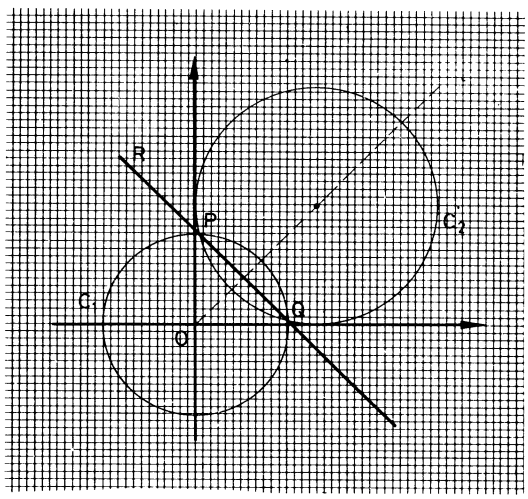


FIG. 3.6.

Los puntos donde se cortan, P y Q, son también los puntos de corte de C_1 y la recta R:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \equiv x^2+y^2=9 \\ R \equiv 8x+8y-24=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow P(0,3),\ Q(3,0)$$

Ejercicio 10

Dibújense las circunferencias

$$C_1 \equiv x^2+y^2=4$$
$$C_2 \equiv x^2+y^2-8x-20=0$$

y luego calcúlense sus puntos comunes.

Ejercicio 11

Hállese la ecuación de la secante común a las circunferencias

$$C_1\text{: centro } (2,5);\ r_1=6$$
$$C_2\text{: centro } (-1,4);\ r_2=5$$

comprobando que es perpendicular a la recta que pasa por los centros.

Obsérvese ahora la figura 3.7. En ella, dos secantes a la circunferencia trazadas por P cortan en los puntos B y A, y B' y A', respectivamente.

Los triángulos $AB'P$ y $A'BP$ son semejantes, ya que el ángulo $\widehat{P}$ es común y los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A'}$ son iguales, por ser inscritos de arco común. Se tiene, por tanto, la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{AP}{A'P}=\frac{B'P}{BP} \Longrightarrow AP\cdot BP=\overline{A'P}\cdot\overline{B'P}=\text{constante.}$$

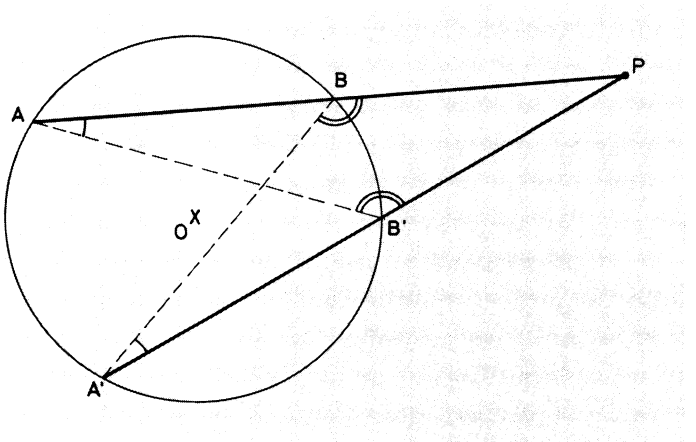


FIG. 3.7.

Este resultado permite definir:

> *Potencia de un punto P respecto de una circunferencia C* es el producto constante de las longitudes de los dos segmentos orientados PA y PB que la circunferencia determina sobre cualquier secante a ella, trazada por P.

Si se elige como secante la recta que une $P(x_0, y_0)$ con el centro $O(a, b)$ de la circunferencia y se denomina d la distancia entre ambos puntos se tiene que la potencia de P respecto a C vale, según se aprecia en la figura 3.8,

$$\text{Potencia}=\overline{PA''}\cdot\overline{PB''}=(d+r)\,(d-r)=d^2-r^2 \qquad [7]$$

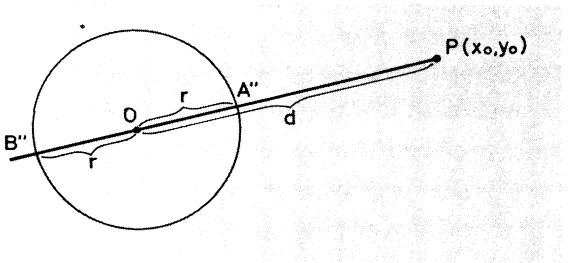


FIG. 3.8.

Por otra parte, la distancia d viene dada por

$$d^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2 \qquad [8]$$

Sustituyendo [8] en [7] se obtiene:

$$\text{Potencia}=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2 \qquad [9]$$

curioso resultado que permite establecer la siguiente

REGLA: Para calcular la potencia del punto $P(x_0, y_0)$ respecto de la circunferencia $C \equiv (x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$, basta con hallar el valor del primer término de la ecuación en el punto P.

Ejemplo 5

La regla dada, evidentemente, sigue siendo válida si la ecuación de la circunferencia viene dada de forma general. Así, la potencia de $P(1, 2)$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2-x+3y=2$ es

$$\text{Pot. } P_{(C)}=1^2+2^2-1+3\cdot 2-2=8$$

Ejercicio 12

Usando la igualdad [7] *y observando la figura* 3.9, *discútase el valor o signo de la potencia de los puntos P, Q, T, según sea interior o exterior o pertenezca a la circunferencia.*

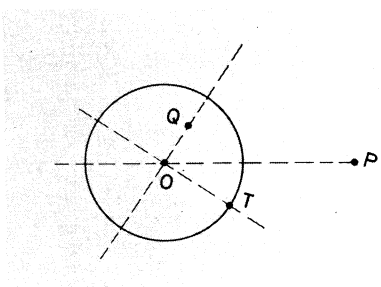


FIG. 3.9.

Ejercicio 13

Obsérvese la figura 3.10. En ella la potencia, constante, de P respecto de la circunferencia vale

$$\text{Pot. } P_{(C)}=\overline{PA_1}\cdot\overline{PB_1}=\overline{PA_2}\cdot\overline{PB_2}=\overline{PA_3}\cdot\overline{PB_3}=\ldots$$

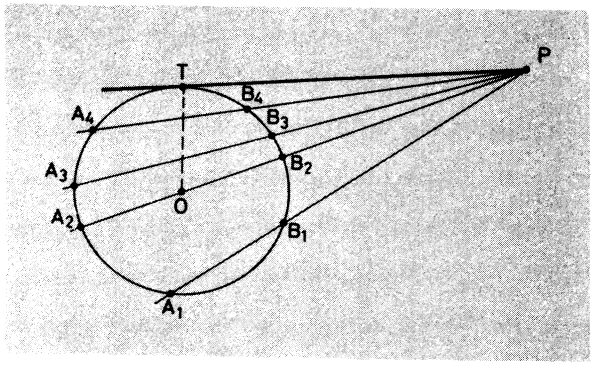


FIG. 3.10.

La figura y esa serie de productos iguales parece sugerir que cuando las secantes tienden a la tangente, la potencia toma la forma

$$\text{Pot. } P_{(C)} = PT \cdot PT = \overline{PT}^2$$

Así es. Trátese de justificar, haciendo el

Ejercicio 13

Utilizando la igualdad [7], *justifíquese que el valor de la potencia de un punto exterior P es el cuadrado del segmento de tangente, trazado desde P, al punto de contacto.*

Aplíquese el resultado anterior para determinar a qué distancia de la costa se halla una plataforma petrolífera de 50 *metros de altura emergida, de la cual sólo se ve la punta desde la orilla del mar. (Radio de la Tierra* $\approx$ 6350 *km.)*

4. EJE RADICAL. CENTRO RADICAL

Dadas dos circunferencias, posiblemente habrá puntos $P(x, y)$ que tengan la misma potencia respecto de estas dos circunferencias. Cabe preguntarse: ¿Dónde están los puntos que tienen la misma potencia, respecto de ambas circunferencias?

Definimos:

> *Eje radical* de dos circunferencias dadas es el lugar de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de ambas.

Ahora, procede identificar ese *eje radical.* ¿Qué es?

Ejemplo 7

Sean las circunferencias de la figura 3.11 (*a*), de ecuaciones

$$C_1 \equiv x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0 \quad \text{y} \quad C_2 \equiv x^2+y^2+2D_2x+2E_2y+F_2=0$$

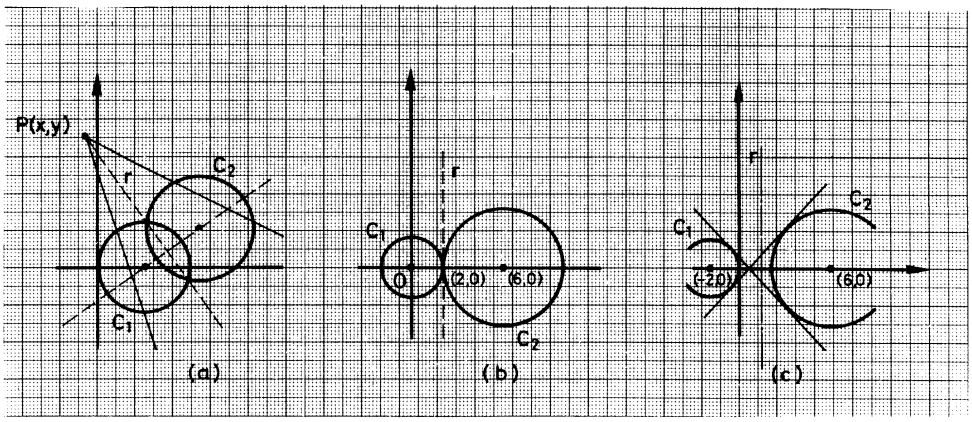


FIG. 3.11.

La potencia de un punto $P(x, y)$ respecto de C_1 y de C_2, usando la regla arriba establecida, se calculará sustituyendo sus coordenadas en las ecuaciones de las circunferencias.

$$\text{Pot. } P_{(C_1)}=x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1$$
$$\text{Pot. } P_{(C_2)}=x^2+y^2+2D_2x+2E_2y+F_2$$

Si P es un punto del eje radical, cuya ecuación se busca, habrá de tener la misma potencia respecto de C_1 y de C_2. Basta, pues, igualar ambas expresiones para asegurar que el punto genérico $P(x, y)$ pertenezca al eje radical, r:

$$r \equiv x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=x^2+y^2+2D_2x+2E_2y+F_2$$

Es decir,

$$\boxed{r \equiv 2(D_1-D_2)x+2(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0} \qquad [10]$$

Si se compara la ecuación [10] con la segunda del sistema [6'], se observará que son la misma, lo que indica que la secante común a las circunferencias es, precisamente en este caso, el eje radical *

* En rigor, debiera justificarse, además, que todo punto de esa recta pertenece al eje radical.

Comprobar que r es perpendicular a la línea de centros es inmediato, usando las pendientes:

$$m_r = \frac{D_2 - D_1}{E_1 - E_2}; \qquad O(-D_1, -E_1) \quad \text{y} \quad O'(-D_2, -E_2)$$

$$m_{\overline{OO'}} = \frac{-E_2 + E_1}{-D_2 + D_1}.$$

Se observa que $m_r \cdot m_{\overline{OO'}} = -1$.

Ejercicio 14

Establézcanse las ecuaciones de las circunferencias dibujadas en la figura 3.11 (*b*). *Luego hállese la ecuación del eje radical de ambas.*

Ejercicio 15

Realícese el ejercicio análogo al anterior, sobre la figura 3.11 (*c*).

Ejercicio 16

Demuéstrese que los ejes radicales de tres circunferencias, tomadas de dos en dos, concurren en un punto. (Este punto recibe el nombre de centro radical.)

Ejercicio 17

Hállese el centro radical de

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1$$
$$C_2 \equiv (x-5)^2 + y^2 = 4$$
$$C_3 \equiv x^2 + (y-5)^2 = 9$$

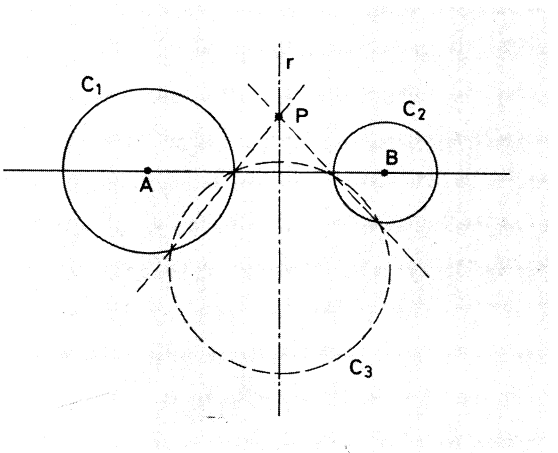


FIG. 3.12.

El trazado geométrico del eje radical, en los casos (*a*) y (*b*) de la figura 3.11, han quedado resueltos. Para el tercer caso (circunferencias exteriores) se puede hacer uso del recién definido centro radical de las dos circunferencias dadas y otra auxiliar, secante de ambas.

En la figura 3.12, el punto P es centro radical de las circunferencias C_1 y C_2 y de la auxiliar C_3.

Como el eje radical ha de ser perpendicular a la línea de centros, basta trazar por P la perpendicular a AB para conseguir el eje radical buscado.

Ejercicio 18

Hállese la ecuación del eje radical de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo de la figura 3.13.

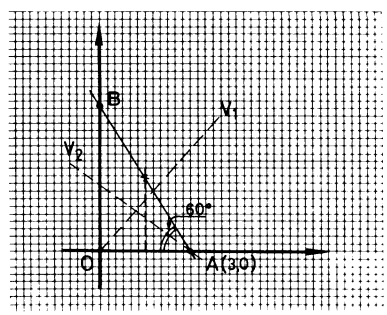


FIG. 3.13.

Ejercicio 19

Establézcase el eje radical de las circunferencias

$$x^2+y^2=2$$
$$2x^2+2y^2-3x+y=5$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.1

1. centro $\left(-\frac{2+6}{2}, \frac{3+11}{2}\right)=(4,7)$, $r^2=(6-4)^2+(11-7)^2=20$ $\Big\}$ $C\equiv(x-4)^2+(y-7)^2=20$

2. $5=-2a \Longrightarrow =-5/2$, $-4=-2b \Longrightarrow b=2$ $\Big\}$ centro $(-5/2, 2)$

$$\left(\frac{-5}{2}\right)^2+2^2-10=r^2, \qquad r=\frac{1}{2}$$

3. I $\quad 4+9+2D\cdot 2+2E\cdot 3+F=0$

II $\quad 1+1+2D-2E+F=0 \qquad\qquad 11+2D+8E=0$

$$\begin{array}{ll} \text{III} & 9+1-2D\cdot 3+2E(-1)+F=0 \\ \hline \text{I- II}=\text{IV} & 11+2D+8E=0 \\ \text{II-III}=\text{V} & -8+8D-4E=0 \\ \hline \text{IV}+2\text{V} & -5+18D=0 \Longrightarrow D=\dfrac{5}{18};\ E=-\dfrac{13}{9};\ F=\dfrac{-49}{9} \end{array}$$

$$x^2+y^2+\frac{5}{9}x-\frac{26}{9}y-\frac{49}{9}=0$$

$$9x^2+9y^2+5x-26y-49=0$$

4. El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de su hipotenusa. Así,

$$C\left(\frac{0+3}{2},\frac{4+0}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2\right);\quad r^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2=\frac{25}{4}$$

$$C_1\equiv\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$$

5. Todo punto de t distinto de C es exterior a la circunferencia, ya que al ser perpendiculares OC y t la longitud de OC es la distancia mínima de los puntos de t a O.

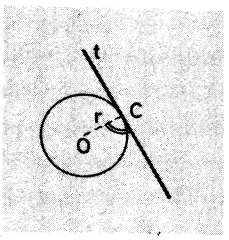


FIG. 3.14.

6. El punto de contacto es (x_0, y_0).
$(x-x_0, y-y_0)$ es proporcional al vector director de la tangente, mientras que (x_0-a, y_0-b) es director de la recta soporte del radio del punto de contacto. Como su producto escalar es nulo, son ortogonales, y sus rectas, perpendiculares.

7. $\left.\begin{array}{l} r\ x+y=2 \\ C\ x^2+y^2=2 \end{array}\right\}$ $(2-y)^2+y^2=2;\ y^2-2y+1=0;$

$$\Delta=4-4=0 \Longrightarrow r \text{ y } C \text{ son tangentes.}$$

8. $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0 \end{array}\right\};\quad x^2+2Dx+F=0;$

$$\Delta=(2D)^2-4F=0 \Longleftrightarrow D^2-F=0$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I} & D^2-F=0 \\ \text{II} & 9+25-6D+10E+F=0 \\ \text{III} & 4+9+4D+6E+F=0 \end{array}\right\}$$

Dos soluciones

D	E	F
0,928	− 2,929	0,862
− 19,928	− 55,071	397,138

9.

$$C(2,3);\ \text{radio}=CT=2$$
$$(x-2)^2+(y-3)^2=4$$

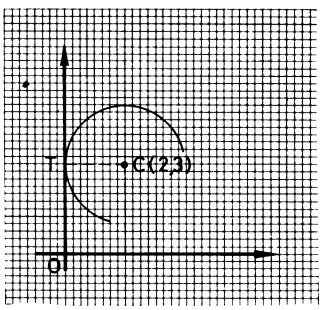


FIG. 3.15.

10.

$$C_1=\left\{\begin{array}{l}\text{centro } (0,0)\\ r=2\end{array}\right. \qquad C_2=\left\{\begin{array}{l}\text{centro } (4,0)\\ a^2+b^2-r^2=-20 \Longrightarrow r=6\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1\equiv x^2+y^2=4 \\ C_2\equiv x^2+y^2-8x-20=0 \end{array}\right\} -$$

$$r\equiv 8x+16=0$$

$$x+2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ x+2=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ Y=0 \end{array}\right\} \ T(-2,0)$$

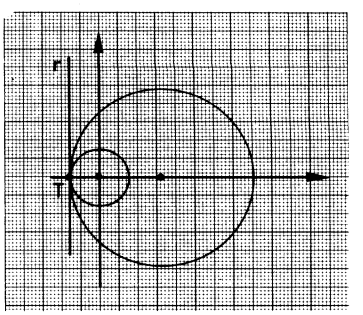


FIG. 3.16.

11. $C_1 \equiv (x-2)^2+(y-5)^2=6^2$; $\quad x^2+y^2-4x-10y-7=0$;
$C_2 \equiv (x+1)^2+(y-4)^2=5^2$; $\quad x^2+y^2+2x-8y-8=0$.

Secante: $-6x-2y+1=0$

Línea de centros: $3y-x-13=0$

12. Pot. $P=d^2-r^2$; $\quad d>r \quad$ Pot. $P>0$;
Pot. $Q=d^2-r^2$; $\quad d<r \quad$ Pot. $Q<0$;
Pot. $T=d^2-r^2$; $\quad d=r \quad$ Pot. $T=0$.

13.

$$\overline{PT}^2=d^2-r^2=\text{Pot. } P_{(C)}$$

Distancia a la costa $=\sqrt{(r+h)^2-r^2}=25.200$ m.

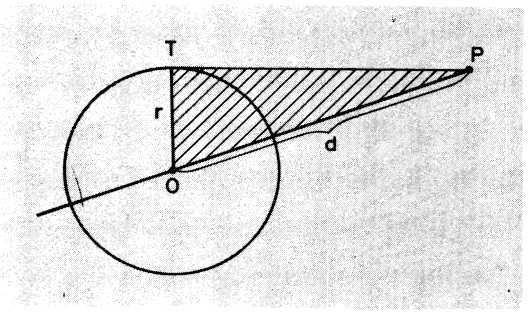


FIG. 3.17.

14.
$$\left.\begin{array}{rr} C_1 \equiv x^2+y^2=4 & \\ C_2 \equiv (x-6)^2+y^2=16; & x^2+y^2-12x+20=0 \end{array}\right\} -$$
$$r \equiv 12x-24=0; \quad r \equiv x-2=0$$

15.
$$\left.\begin{array}{rr} C_1 \equiv (x+2)^2+y^2=4; & x^2+y^2+4x=0 \\ C_2 \equiv (x-6)^2+y^2=16; & x^2+y^2-12x+20=0 \end{array}\right\} -$$
$$r \equiv 16x-20=0; \quad r \equiv 4x-5=0$$

16.

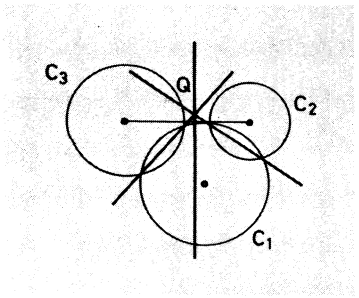


FIG. 3.18.

Sea Q el punto intersección de los ejes radicales de los pares de circunferencias C_1, C_2 y C_1, C_3. Se cumple:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pot. } Q_{(C_1)} = \text{Pot. } Q_{(C_2)} \\ \text{Pot. } Q_{(C_1)} = \text{Pot. } Q_{(C_3)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Pot. } Q_{(C_2)} = \text{Pot. } Q_{(C_3)}$$

es decir, Q pertenece al eje radical de C_2, C_3.

17.

$$\begin{array}{ll} x^2+y^2=1 & x^2+y^2=1 \\ \underline{x^2+y^2-10x+21=0} & \underline{x^2+y^2+16=0} \\ r_{12} \equiv 10x-20=0 & r_{13} \equiv 10y-16=0 \\ x-2=0 & y-8=0 \end{array}$$

centro radical (2, 8)

18. $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{OB}{3} \Longrightarrow \overline{OB} = 3\sqrt{3} \Longrightarrow B(0, 3\sqrt{})$

circunscrita:

$$C_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{centro: } P\left(\dfrac{0+3}{2}, \dfrac{0+3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\ r^2 = \overline{AP^2} = \left(3-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(0-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{4} = \dfrac{36}{4} = 9 \end{array} \right.$$

$$C_1 \equiv \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9; \quad x^2+y^2-3x-3\sqrt{3}y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \equiv y = x \\ V_2 \equiv (y-3) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-0) \end{array}\right\} \text{ Incentro } I\left(\frac{3}{2}(3-\sqrt{3}), \frac{3}{2}(3-\sqrt{3})\right)$$

$$r^2 = \left[\frac{3}{2}(3-\sqrt{3})\right]^2 = 27 - \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

inscrita:

$$C_2 \equiv \left(x-\frac{3}{2}(3-\sqrt{3})\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}(3-\sqrt{3})\right)^2 = 27-\frac{27\sqrt{3}}{2}$$

Restando C_1 y C_2, se obtiene

$$r \equiv (12-2\sqrt{3})x + (18-12\sqrt{3})y - 135 + 27\sqrt{3} = 0$$

19.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2=0 \\ x^2+y^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{5}{2}=0 \end{array}\right\} -$$

$$\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0$$

$$r \equiv 3x-y+1=0$$

3.2

Elipse

En este capítulo se estudian distintas maneras de trazar elipses, y cada una de ellas pone de manifiesto alguna propiedad que las singulariza. Para demostrar que siempre se trata de la misma curva se recurre a la ecuación que cumplen las coordenadas de sus puntos, una vez elegida la referencia cartesiana conveniente.

1. PROYECCION DE UNA CIRCUNFERENCIA SOBRE UN PLANO OBLICUO

En una primera aproximación, una elipse puede considerarse como una «circunferencia deformada». Basta utilizar distintas unidades para cada coordenada de la referencia, como indica el

Ejemplo 8

Sobre la referencia de la figura 3.19 $(O; X', Y')$ en la que la unidad de abscisas $O'A'$ es doble que la de las ordenadas $O'B'$ se construye la circunferencia unidad, centrada en el origen $x'^2 + y'^2 = 1$.

Si se busca la ecuación de la curva gráfica obtenida en la nueva referencia $(O; X, Y)$ y unidades OA y OB, habrá que sustituir las coordenadas en la ecuación inicial por las nuevas coordenadas, según las relaciones del cambio

$$x = 2x' \qquad x' = 1/2\, x$$
$$y = y' \qquad y' = y$$

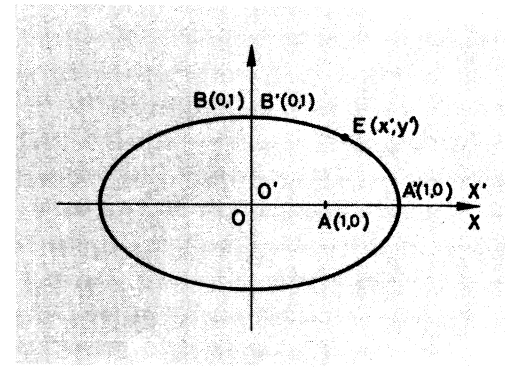


FIG. 3.19.

obteniéndose

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

En la nueva referencia, la gráfica ya no corresponde a una circunferencia. Es una elipse.

Ejercicio 20

Trácese sobre papel milimetrado una circunferencia de radio unidad, eligiendo como unidades sobre el eje O'X' un segmento de longitud 3 *cm y sobre el eje O'y' un segmento de longitud* 2 *cm. Considérese, luego, la gráfica referida a unidades de* 1 *cm sobre cada eje y demuéstrese que la ecuación es*

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$$

La curva obtenida podrá parecer un poco artificial, pero en realidad es frecuente en la vida ordinaria. Un corte oblicuo en un leño cilíndrico ofrece una sorprendente colección de elipses concéntricas gracias al distinto color de los anillos estacionales. El siguiente ejemplo demuestra que se trata efectivamente de elipses.

Ejemplo 9

Hacemos un par de cortes en un cilindro (Fig. 3.20). El plano P es oblicuo respecto del eje del cilindro, mientras que el plano P' es perpendicular al mismo; la sección será, por consiguiente, una circunferencia. Supongamos que los cortes se toquen en el punto A. Si O y O' son los puntos intersección del eje con los planos P y P', elegimos las rectas AO y AO' y sus perpendiculares por O y O' como ejes cartesianos para cada plano. Tomamos sobre los cuatro ejes la misma unidad de longitud, el radio de la circunferencia sobre P'. La ecuación de ésta será, por tanto,

$$(x')^2+(y')^2=1.$$

Los ejes OY y OY' son paralelos; en cambio, los ejes OX y OX' forman un ángulo φ de vértice en A. Si suponemos $\varphi = 60°$, el segmento

$$OC = OB/\cos 60° = 2.$$

En general, las coordenadas de un punto sobre P están relacionadas con las del punto-proyección sobre P' por las ecuaciones

$$x = 2x' \qquad y = y$$

de modo que la ecuación de la curva sobre P' es

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1.$$

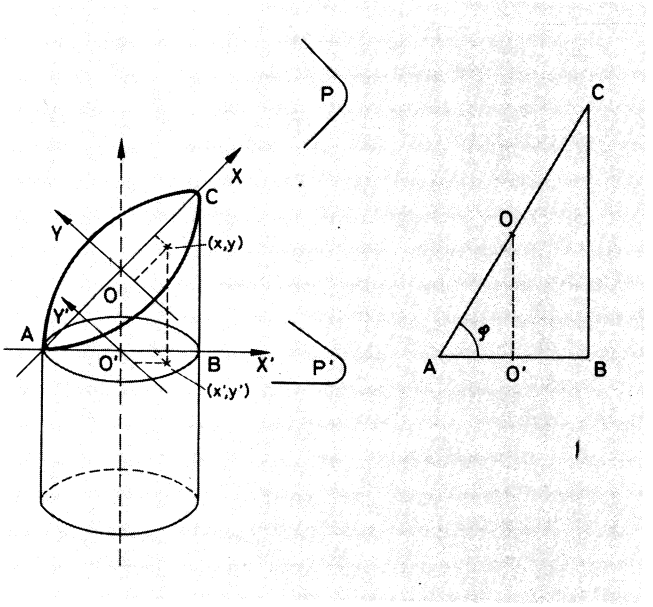


FIG. 3.20.

Ejercicio 21

Se sabe que las circunferencias concéntricas de un corte perpendicular de un árbol de tres años tienen por ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$ *y* $x^2 + y^2 = 3$. *Hállense las elipses que se obtendrían con un corte de* 60° *en el mismo punto.*

En general, si el cilindro tiene secciones circulares de ecuación

$$(x')^2 + (y')^2 = b^2$$

y se hacen cortes oblicuos de ángulo φ, la ecuación de las elipses resultantes es

$$\frac{x^2}{1/\cos^2 p} + \frac{y^2}{1^2} = b^2$$

o bien, dividiendo ambos miembros por b^2 y sustituyendo $\frac{b^2}{\cos^2 p}$ por a^2,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad [11]$$

La ecuación [11] se denomina *ecuación reducida de la elipse* y supone una elección de ejes cordenados algo especial. En efecto, si un punto (x, y) pertenece a la elipse, se observa inmediatamente que los puntos $(-x, y)$, $(x, -y)$ y $(-x, -y)$ también pertenecen a la elipse, de modo que la curva es simétrica respecto al origen de coordenadas y respecto a los ejes coordenados elegidos. Es decir, una elipse tiene ecuación reducida del tipo [11] si está referida a sus ejes de simetría.

Ejercicio 22

Comprobar que los puntos $A(a, 0)$, $A'(0, -a)$, $B(b, 0)$ *y* $B'(0, -b)$ *pertenecen a la elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Estos puntos se llaman vértices de la elipse.*

Si a es mayor que b, el segmento $\overline{AA'}$ *se llama «eje mayor» de la elipse y su longitud es* $2a$. *El eje menor* $\overline{BB'}$ *tiene, a su vez, una longitud* $2b$.

Ejercicio 23

Calcúlense las longitudes de los ejes de las elipses

a) $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$;

b) $2x^2+y^2=25$.

En resumen, hasta el momento, podemos recuadrar:

> Una elipse es una sección oblicua de una superficie cilíndrica, o bien, el lugar geométrico de los puntos del plano que, en una referencia ortonormal, cumplen la ecuación reducida
>
> $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2. SUMA DE DISTANCIAS A DOS PUNTOS FIJOS

Tómese un cordel de longitud $2a$ y fíjense sus extremos en dos puntos del eje OX, F y F', que se denominan *focos*. La distancia entre focos la designamos $2c$ que, evidentemente, es menor que $2a$, y, siendo F y F' simétricos respecto al eje OY, sus coordenadas serán $(c, 0)$ y $(-c, 0)$.

Deslícese un lápiz con el cordel tenso, conforme indica la figura 3.21. Se

obtiene así una curva cerrada cuyos puntos tienen una suma de distancias a los focos constantemente igual a $2a$.

$$\overline{EF} + \overline{EF'} = 2a.$$

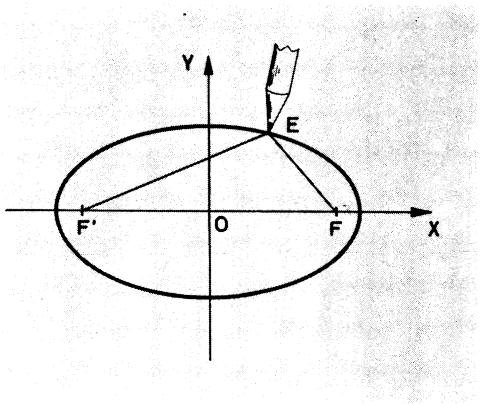


FIG. 3.21.

Demostremos que se trata de una elipse. Sea $E(x, y)$ un punto cualquiera de la curva trazada anteriormente. Entonces,

$$\overline{EF} = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\overline{EF'} = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\overline{EF} + \overline{EF'} = 2a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \iff$$

$$\iff 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado esta última igualdad:

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2$$

Simplificando y aislando el radical ($(x-c)^2 - (x+c)^2 = -4cx$):

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando de nuevo al cuadrado,

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \iff$$

$$\iff a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

Dividimos la igualdad por el primer miembro y resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por otra parte, la figura 3.22 pone de relieve que el punto B, de abscisa

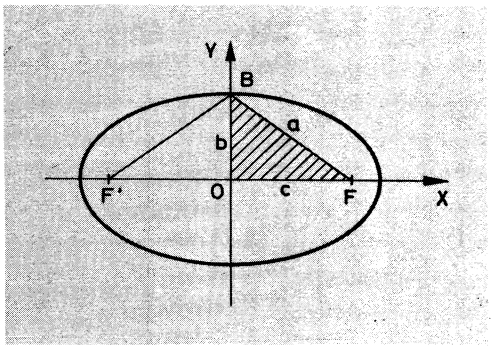


FIG. 3.22.

cero, tiene una ordenada b tal que $b^2 = a^2 - c^2$. De modo que la curva trazada es una elipse en la que la longitud del cordel da la longitud del eje mayor.

Con ello, podemos recuadrar

> *Elipse* es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a la longitud del eje mayor $2a$.

Los segmentos EF y EF' reciben el nombre de *radios vectores* del punto E. Por otra parte, el cociente c/a se suele denotar por e y se llama *excentricidad* de la elipse.

Ejercicio 24

¿Cuál es la elipse, de las de la figura 3.23, *que tiene una distancia menor entre los focos? ¿Por qué? ¿Cuál tiene mayor excentricidad?*

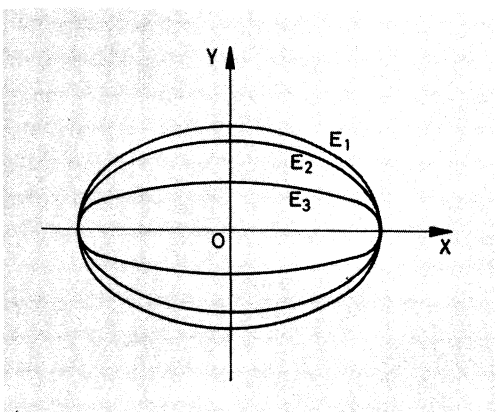


FIG. 3.23.

Ejercicio 25

Con la nueva definición de elipse, ¿se puede considerar la circunferencia como elipse? ¿Dónde estarán situados sus focos? Razónese sobre el ejercicio anterior.

Ejercicio 26

Hállese la distancia focal en una elipse cuyo eje mayor tiene longitud doble que el eje menor y estúdiense las excentricidades de las elipses consideradas en el ejercicio 21.

Ejercicio 27

Atendiendo a la figura 3.24, *razónese geométricamente que la suma de distancias a los focos desde un punto Q interior de la elipse es menor que* 2*a.*

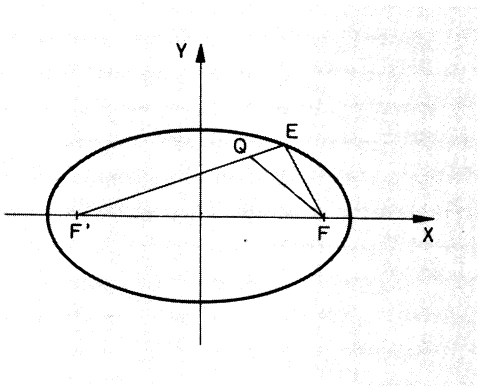


FIG. 3.24.

Como en el caso de la circunferencia, los puntos (x, y) interiores a la elipse quedan identificados por la desigualdad:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1.$$

Para los exteriores es correcta la desigualdad en sentido contrario.

Ejemplo 3.13

Construcción de una elipse por puntos mediante regla y compás.

Una vez elegidos sobre el eje OX el eje mayor $\overline{AA'}$ y los focos F y F', simétricos respecto al origen, se marca un punto Q del segmento $\overline{AA'}$ y se traza un arco desde cada foco con radio $\overline{QA}$ y otro, también desde cada foco, con radio $\overline{QA'}$. Los puntos de intersección pertenecen a la elipse (Fig. 3.25):

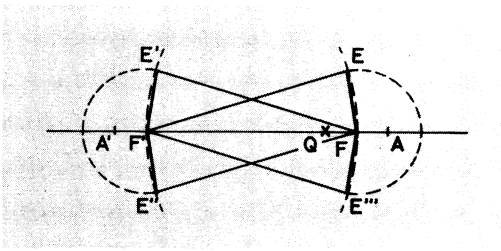


FIG. 3.25.

Ejercicio 28

Sea E una elipse de eje mayor igual a 2a y C una circunferencia con el mismo centro y radio a. Demuéstrese que las intersecciones C y C' de la circunferencia con una recta paralela al eje OX por el punto B, que aparecen en la figura 3.26, *tienen sus abscisas respectivas iguales a las de los focos.*

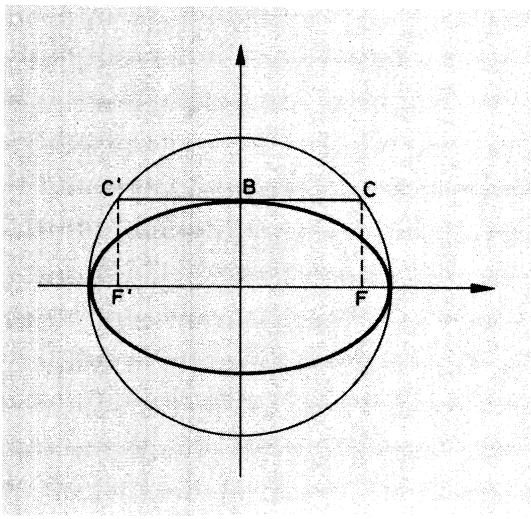


FIG. 3.26.

Este ejercicio justifica una manera cómoda de determinar los focos de una elipse dada.

3. EL COMPAS ELIPTICO

Supóngase que se desea trazar una elipse cuyos ejes miden $2a$ y $2b$. Señálense sobre una regla tres puntos, A, B y C, de modo que $\overline{AC}=a$ y $\overline{BC}=b$. Escogida la referencia (O, X, Y), permítase que el punto A sólo se deslice por el eje OY y que el punto B esté siempre sobre el eje OX. En estas condiciones, el punto C está sobre la elipse pedida.

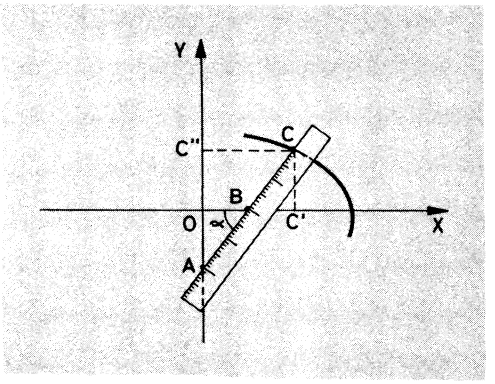


FIG. 3.27.

En efecto, en la figura 3.27, sean x e y las coordenadas del punto C en el momento en que la regla forma un ángulo α con el eje OX. Se tendrá, por proyección:

$$x = \overline{OC'} = \overline{C''C} = \overline{AC} \cos \alpha = a \cos \alpha$$
$$y = \overline{OC''} = \overline{C'C} = \overline{BC} \operatorname{sen} \alpha = b \operatorname{sen} \alpha$$

y de las relaciones $x = a \cos \alpha$, $y = b \operatorname{sen} \alpha$, llamadas ecuaciones paramétricas de la elipse, se obtiene

$$\frac{x}{a} = \cos \alpha$$
$$\frac{y}{b} = \operatorname{sen} \alpha$$

elevando al cuadrado y sumando

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1.$$

Ejercicio 29

Determínense los focos de una elipse, trazada con el compás elíptico, usando solamente ese compás elíptico.

4. CIRCUNFERENCIAS DIRECTRICES Y TANGENTES

Elegidos los focos F y F' sobre el eje OX y simétricos respecto al origen, trazamos una *circunferencia* llamada *directriz*, de centro en F y radio $2a$. Unimos un punto cualquiera C de la circunferencia con F y F'. La mediatriz de CF' corta el radio CF en un punto E que pertenece a la elipse de eje mayor $2a$ y focos F y F' (Fig. 3.28).

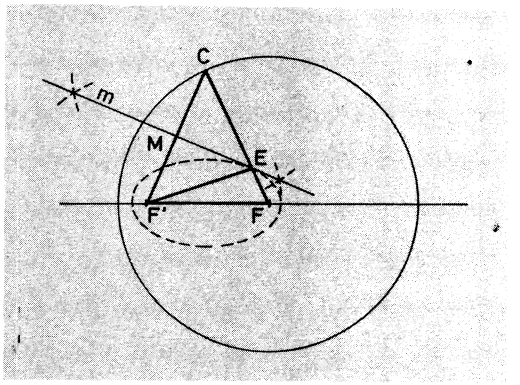


FIG. 3.28.

En efecto, como $\overline{EF'} = \overline{EC}$, resulta que

$$\overline{EF'} + \overline{EF} = \overline{EC} + \overline{EF} = \overline{CF} = 2a$$

Al recorrer C todos los puntos de la circunferencia, el punto C describe la elipse. La misma curva se obtendría repitiendo el proceso con la circunferencia directriz de centro en F'.

> El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una circunferencia y de un punto interior a ella es una elipse.

También es cierta la proposición recíproca.

El punto y el centro de la circunferencia son los focos de la elipse.

Ejercicio 30

Examínese si una circunferencia cumple la nueva definición dada de elipse.

Ejercicio 31

Atendiendo a la figura 3.28, *demuéstrese geométricamente que la mediatriz ME es tangente a la elipse en el punto E. (Indicación: los demás puntos de ME son exteriores.)*

El ejercicio anterior sugiere un método muy interesante de trazado aproximado de una elipse, pues, por cada punto de la curva, disponemos de una tangente dibujada.

Por otra parte, este método descubre la manera de trazar la tangente a la elipse en un punto dado de ella. En efecto, se traza la circunferencia directriz de centro en F y se prolonga el segmento EF hasta cortarla en un punto C. La mediatriz del segmento CF' es la tangente pedida.

La expresión analítica de la tangente por un punto de la elipse, $E(x_0, y_0)$

resulta muy sencilla. Por una parte, la pendiente es y'_0, que se calcula por derivación implícita de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{2x_0}{a^2}+\frac{2y_0y'_0}{b^2}=0 \implies y'_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0};$$

por otra, la ecuación de la recta que pasa por (x_0, y_0) y tiene pendiente y'_0 es

$$y-y_0=y'_0(x-x_0)=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

haciendo operaciones y quitando denominadores

$$ya^2y_0-y_0^2a^2=-b^2x_0+b^2x_0^2$$
$$a^2yy_0+b^2xx_0=a^2y_0^2+b^2x_0^2$$

dividiendo por a^2b^2 y teniendo en cuenta que (x_0, y_0) pertenece a la elipse,

$$\frac{yy_0}{b^2}+\frac{xx_0}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}=1$$

La ecuación de la recta tangente a la elipse por un punto (x_0, y_0) de la misma es

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

Ejercicio 32

Calcúlese el punto de intersección de las tangentes a la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

por los puntos $E_1(3\,;\,3{,}2)$ *y* $E_2(-3\,;\,3{,}2)$.

Ejercicio 33

Hállense dos puntos de la elipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$$

tales que las tangentes en ellos sean paralelas a la recta $y=2x$.

Ejercicio 34

Sea $E(3\,;\,3{,}2)$ *un punto de la elipse*

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Calcúlese la ecuación de la recta que pasa por E y es perpendicular a la tangente a la elipse por dicho punto. Esta recta se llama normal *a la curva en E. Demuéstrese que es bisectriz del ángulo formado por las rectas EF y EF':*

> La recta *normal* a una elipse en un punto es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores del punto.

En el ejercicio anterior se ha comprobado esta importante propiedad en un caso concreto. La figura 3.29 facilita su demostración geométrica. En efecto, la recta tangente *ME*, por ser mediatriz del segmento *E'F'*, es bisectriz del ángulo α. Pero α y β son suplementarios, y el ángulo $\widehat{MEN}$ es recto por hipótesis; por tanto, *EN* es bisectriz del ángulo β.

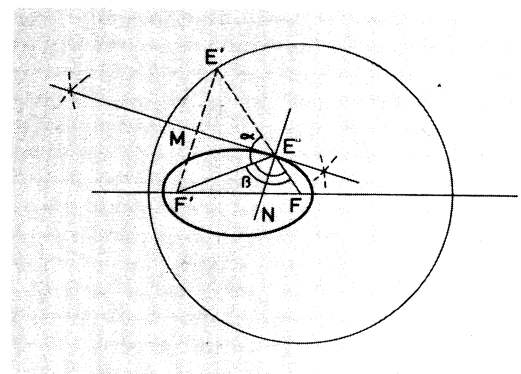


FIG. 3.29.

Esta propiedad caracteriza también a las elipses, pero su demostración no es elemental. Por otra parte, conocidas las leyes de reflexión de la Física, esta propiedad conduce a resultados curiosos. Por ejemplo, en un billar elíptico, una bola que pasase por un foco pasaría por el otro foco después del rebote, ya que las direcciones de ida y vuelta tienen por bisectriz la normal en el punto de contacto. También en una sala de bóveda con sección elíptica sería posible oír un reloj a gran distancia con tal de colocarlo en un foco y situarse uno mismo en el otro foco.

Ejercicio 35

Calcular el camino recorrido por una bola de billar elíptico que, partiendo de un foco, llega a él después de cuatro rebotes. (Eje mayor, 2 *metros.)*

Ejercicio 36

En la figura 3.30 *se dan una elipse y un punto exterior a la misma, Q. En el dibujo aparece también la circunferencia directriz por el foco F y un arco de centro en Q y radio QF'. ¿Cómo obtener las dos tangentes a la elipse que pasan por Q?*

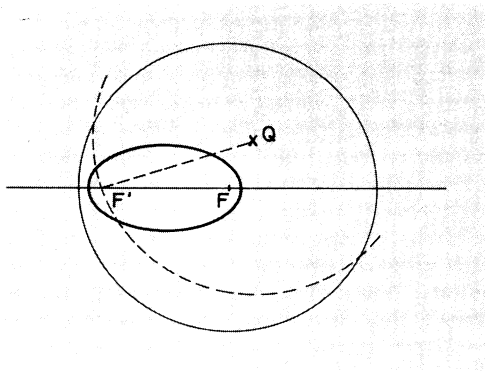


FIG. 3.30.

Ejercicio 37

Resolver el mismo problema anterior, analíticamente, para la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$$

y el punto $Q(5, 4)$.

5. SECCIONES DEL CONO DE REVOLUCION

Interpóngase oblicuamente un cristal entre una circunferencia mirada frontalmente y el ojo. Si se dibuja sobre él con un rotulador el perfil aparente de la circunferencia, se obtiene una elipse.

Este método es similar al de seccionar un cilindro; pero en el caso presente, el cristal corta oblicuamente el cono formado por las visuales del ojo a la circunferencia.

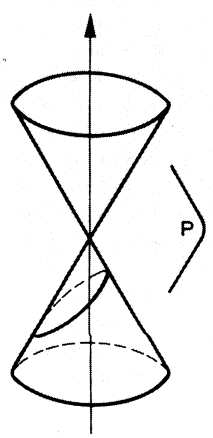


FIG. 3.31.

No toda sección oblicua de un cono da una elipse, como se verá más adelante. La curva resultante depende de la inclinación del plano respecto al eje del cono y del punto intersección del plano con el eje.

Para que la sección sea efectivamente una elipse, el plano debe cortar a todas las generatrices a un mismo lado del vértice y sin pasar por éste (Fig. 3.31).

Esta manera de obtener la elipse como sección plana del cono es común a todas las curvas que se estudian en esta unidad; de ahí el nombre genérico de «curvas cónicas» que se atribuye a todas ellas.

6. ORBITAS GRAVITATORIAS

Desde que el hombre ha logrado poner en órbita terrestre, lunar o solar sus satélites artificiales se ha conseguido una nueva forma un tanto espectacular de trazado de elipses. Agotado el combustible o con los motores parados, el satélite describe una trayectoria de acuerdo con las leyes de Kepler:

1. Los planetas se mueven describiendo elipses, en uno de cuyos focos está el astro centro del sistema; en nuestro caso, el Sol.
2. El radio vector que une el Sol con un planeta describe áreas iguales en tiempos iguales (zonas sombreadas de la figura 3.32).
3. Los cuadrados de los periodos o tiempo que tardan los planetas en dar una vuelta completa alrededor del Sol están en la misma relación que los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.

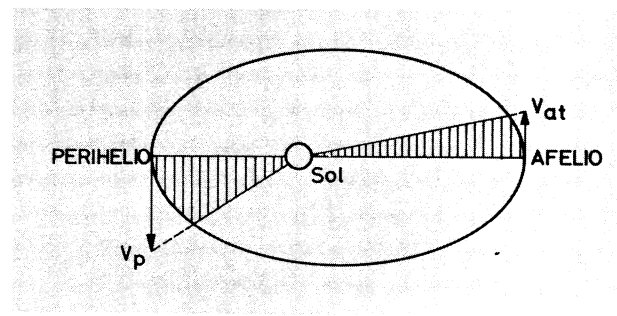


FIG. 3.32.

En un determinado sistema formado por un planeta y un satélite, bastan dos datos para determinar el tipo de órbita que describirá el satélite: su energía total E, suma constante de sus energías potencial y cinética, y el área A, barrida por el radio vector en la unidad de tiempo, en un momento dado. Conocidas las masas del satélite m y la del planeta M, en torno al cual gira, se obtienen los semiejes mediante las fórmulas siguientes:

$$a = \frac{G \cdot M \cdot m}{2|E|}; \qquad b = A \cdot \sqrt{\frac{2m}{|E|}}$$

en las que

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ (constante de gravitación universal),
a = semieje mayor,
b = semieje menor de la órbita.

Ejercicio 38

Para ángulos pequeños, se pueden considerar las áreas sombreadas en la figura 3.32 *iguales a las áreas de los triángulos rectángulos formados sobre los vectores velocidad que se dibujan. Sabiendo que la excentricidad de la órbita terrestre es* 0,017 *y la velocidad es* 29,3 *km/seg en el afelio, a* 152,1 *millones de kilómetros del Sol, calcúlese la velocidad de la Tierra, al pasar por el perihelio.*

Ejercicio 39

Hállense los semiejes de la trayectoria elíptica de un satélite de 400 *kg de masa, sabiendo que el perigeo dista* 40 000 *km del centro de la Tierra y su velocidad en ese instante es de* 4 $km \cdot s^{-1}$. *Recuérdese que*

$$E = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Dato: masa de la Tierra, $M = 6{,}6 \times 10^{24}$ kg.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.2

20. El cambio de referencia corresponde a las relaciones:

$$x' = x/3$$
$$y' = y/2$$

Entonces,

$$x'^2 + y'^2 = 1 \implies \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

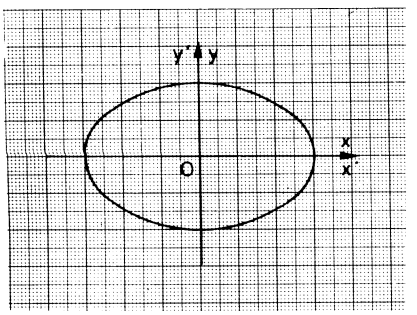


FIG. 3.33.

21. Como indica el texto que sigue al ejercicio, las ecuaciones de las tres elipses son

$$\left.\begin{aligned} x^2/2^2+y^2/1^2&=1\\ x^2/2^2+y^2/1^2&=2\\ x^2/2^2+y^2/1^2&=3 \end{aligned}\right\}$$

ya que

$$2^2=(1/\cos 60°)^2.$$

22. Sustitúyase.

23. *a)* $2a=2\sqrt{40}=4\sqrt{10}$; $2b=2\sqrt{10}$;

b) $\dfrac{x^2}{25/2}+\dfrac{y^2}{25}=1$; $2a=2\sqrt{25/2}=5\sqrt{2}$; $2b=2\sqrt{25}=10$.

24. La E_1. En efecto, $2c=2\sqrt{a^2-b^2}$. Es claro que

$$b_1>b_2>b_3 \implies c_1<c_2<c_3.$$

La excentricidad mayor corresponde a E_3, ya que

$$c_3/a>c_2/a>c_1/a.$$

25. Una circunferencia se puede considerar como una elipse de focos coincidentes. Los radios vectores «se superponen» y son el radio del punto; $2r$ es una cantidad constante. A menor excentricidad, mayor proximidad de los focos. La excentricidad de la circunferencia es nula.

26. $2a=4b$; $2c=2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{4b^2-b^2}=2\sqrt{3}b$.

En el ejercicio 21, todas las elipses tienen la misma excentricidad.

27. $\overline{QE}+\overline{EF}>\overline{QF}$, propiedad triangular.

$2a=\overline{F'Q}+\overline{QE}+\overline{EF}>\overline{F'Q}+\overline{QF}$.

28. En el triángulo rectángulo OBC,

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{OC^2}-\overline{OB^2}}; \qquad \overline{OC}=a, \quad \overline{OB}=b;$$

por tanto, $\overline{BC}=c$.

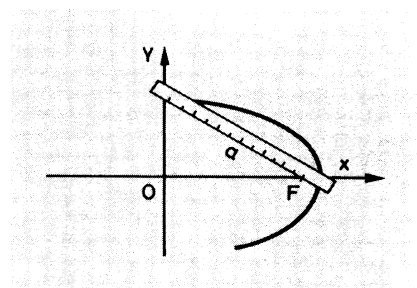


FIG. 3.34.

29. La posición simétrica de la regla, respecto de OY, da el otro foco (Fig. 3.34).

30. Efectivamente, una circunferencia de radio r es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de su centro y de los de otra circunferencia concéntrica con ella, de radio $2r$.

31. Sobre la figura 3.28, $\forall\, E' \neq E,\ E' \in m$,

$$\overline{F'E'} + \overline{E'F} = \overline{E'C} + \overline{E'F} > \overline{CF} = 2a$$

Luego E es el único punto de m que pertenece a la elipse; es decir, m es tangente en E a la cónica.

32.

$$\left.\begin{aligned} t_1 &\equiv \frac{-3x}{25} + \frac{3{,}2\,y}{16} = 1 \\ t_2 &\equiv \frac{3x}{25} + \frac{3{,}2\,y}{16} = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow P(0, 5)$$

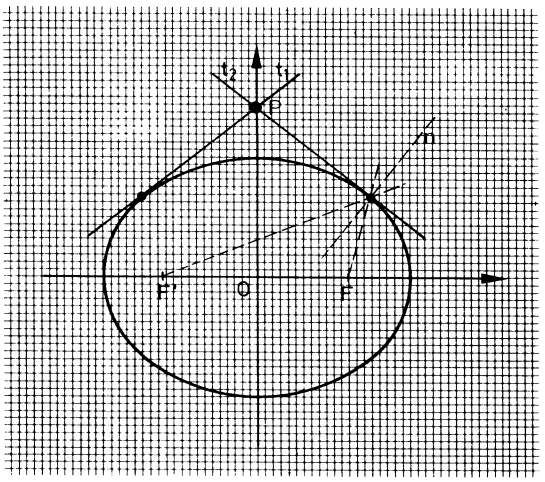


FIG. 3.35.

33.

$$t \equiv \frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{4} = 1 \Longrightarrow \text{pendiente: } m = -\frac{4x_0}{9y_0} = 2 \left.\begin{aligned} \\ \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_1\left(-\frac{9\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right) \quad \text{y} \quad P_2\left(\frac{9\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{-5}\right)$$

34. Sobre la figura 3.35,

$$t_2 \equiv \frac{3x}{25} + \frac{3{,}2y}{16} = 1 \implies m_{t_1} = -\frac{3}{5}$$

$$m_n = \frac{5}{3}$$

$$n \equiv y - 3{,}2 = \frac{5}{3}(x-3)$$

Las ecuaciones de $\overline{EF}$ y $\overline{EF'}$ son

$$\begin{cases} 8x - 15y + 24 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases};$$

y las bisectrices de los ángulos que forman

$$\frac{8x - 15y + 24}{\sqrt{64+225}} = \pm\frac{x-3}{1},$$

que coinciden con n y t_2.

35. Camino $= 4 \times 2a = 8a = 8$ metros.

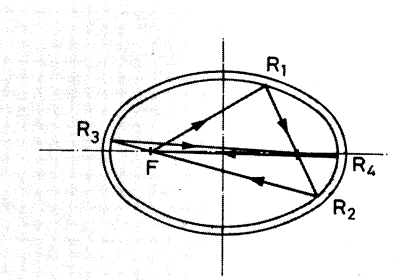


FIG. 3.36.

36. Circunferencia directriz por F. La circunferencia de centro en Q y radio $\overline{F'Q}$ corta a la anterior en C_1 y C_2. Las mediatrices de los segmentos $\overline{F'C_1}$ y $\overline{F'C_2}$ son las tangentes buscadas.

37.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{5x_0}{25} + \dfrac{4y_0}{4} = 1 \\ \dfrac{x_0^2}{25} + \dfrac{y_0^2}{4} = 1 \end{array}\right\} \text{ Puntos de contacto } (x_0, y_0) \begin{cases} (-3, 8/5) \\ (5, 0) \end{cases}$$

Las ecuaciones de las dos tangentes son:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{-3-5} = \dfrac{y-8/5}{8/5-4} \\ x = 5 \end{cases}$$

38. $r_{af} = a + c = a(1+e) \implies a - c = a(1-e) = \dfrac{152{,}1}{1+e} \cdot (1-e) =$

$$= r_p = r_{af} \frac{1-e}{1+e}$$

Segunda ley de Kepler:

$$v_p = \frac{v_{af} \cdot r_{af}}{r_p} = \frac{29{,}3 \times 1{,}017}{0{,}983} = 30{,}31 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

39. $E = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r} + \dfrac{1}{2} mv^2 = -1{,}2022 \times 10^9$ j.

$A = 8 \times 10^{10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \dfrac{1}{2}$ vr.

$a = 73{,}2357 \times 10^6$ m.

$b = 65{,}2599 \times 10^6$ m.

3.3

Hipérbola

1. DIFERENCIA DE DISTANCIAS A DOS PUNTOS FIJOS

Tómese una regla AB de longitud m y fíjese en B el extremo de un cordel de longitud n, de modo que $m-n=2a$, para un a determinado. Sobre el eje OX se eligen dos puntos simétricos respecto al origen $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, llamados focos, cuya distancia $2c$ ha de ser mayor que $2a$. Hágase coincidir el extremo A de la regla con uno cualquiera de los focos, mientras que el extremo libre del cordel se sujeta en el otro foco. Al deslizar un lápiz a lo largo de la regla, según lo permita el cordel, se dibuja el par de arcos de una curva denominada hipérbola, que aparecen trazados en la figura 3.37.

También aquí se llaman radios vectores los segmentos $\overline{FH}$ y $\overline{F'H}$ que unen los focos con un punto cualquiera H de la curva y la diferencia de sus longitudes es constantemente igual a $2a$ porque

$$\overline{F'H}-\overline{FH}=(\overline{AB}-\overline{BH})-\overline{HF}=\overline{AB}-(\overline{BH}+\overline{HF})=m-n=2a.$$

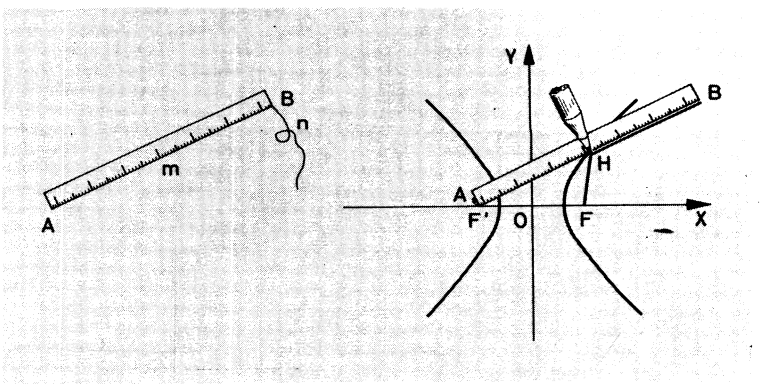


FIG. 3.37.

Según ello, se define:

> La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante.

La ecuación que satisfacen las coordenadas (x, y) de los puntos de la hipérbola se obtiene de modo parecido a la de la elipse:

$$\overline{F'H} - \overline{FH} = \sqrt{(x-(-c))^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 y^2} = 2a.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando se obtiene

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando de nuevo al cuadrado, reduciendo términos y simplificando, se llega a la expresión

$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Con el cambio $b^2 = c^2 - a^2$ y dividiendo ambos miembros por el producto a^2b^2 se obtiene la llamada *ecuación reducida* de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ejercicio 40

Analícese si el origen de coordenadas y los ejes son elementos de simetría de la hipérbola dada.

Ejercicio 41

Al despejar y en función de x en la ecuación reducida de la hipérbola, se obtiene una función biforme:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Hállese para la rama positiva $(y > 0)$:

a) *El campo de definición.*
b) *Las intersecciones con los ejes.*

Los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llaman *vértices* de la hipérbola y el cociente de la distancia focal por la distancia entre vértices, $2c/2a = c/a$, *excentricidad.* La excentricidad es siempre mayor o igual a 1. Si $e = c/a = \sqrt{2}$, se dice que la *hipérbola* es *equilátera.*

Ejercicio 42

Calcúlese b en función de a en una hipérbola equilátera, dada mediante su ecuación reducida.

Ejercicio 43

Hallar las coordenadas de los focos y la excentricidad de la hipérbola

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

En la figura 3.38 se ha construido un rectángulo centrado en el origen de coordenadas y de lados paralelos a los ejes de longitud $2a$ y $2b$. Las rectas-soporte de sus diagonales se llaman asíntotas y se demostrará en la próxima unidad que son tangentes a la hipérbola en el infinito.

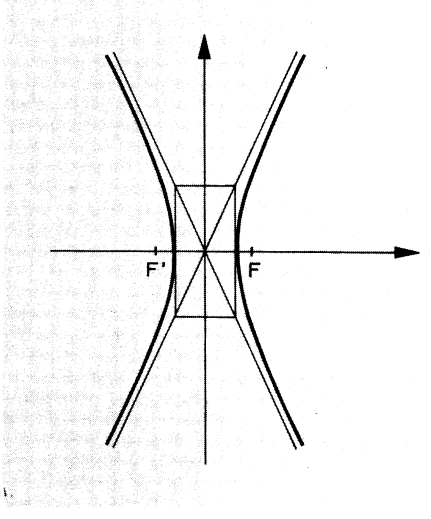


FIG. 3.38.

Ejercicio 44

Demuéstrese que las asíntotas de una hipérbola equilátera son las bisectrices de los ángulos formados por los ejes.

Ejercicio 45

Justifíquese que las hipérbolas con asíntotas comunes tienen la misma excentricidad y, según ello, ordénense los focos de las hipérbolas de la figura 3.39.

Obsérvese que el par de rectas asíntotas se puede considerar como una hipérbola degenerada en la que los focos coinciden y $a = 0$.

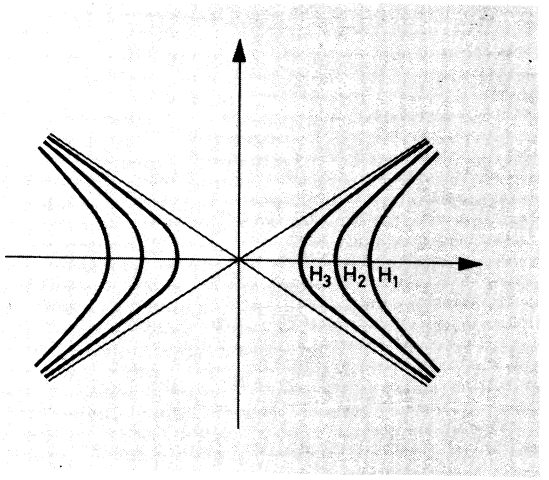


FIG. 3.39.

Ejemplo 1.

Construcción de la hipérbola por puntos con regla y compás. En la figura 3.40, elijamos los focos F y F' y los vértices A y A', simétricos respecto al origen y a distancias $2c$ y $2a$, respectivamente. Las intersecciones de una circunferencia de centro en F y radio $r=d$ con otra de centro en F' y radio $r'=2a-d$ son puntos de la hipérbola para todo d perteneciente al intervalo $[c-a, +\infty)$. Intercambiando el papel de los focos, o bien por simetría, se obtendrán puntos de la otra rama de la hipérbola.

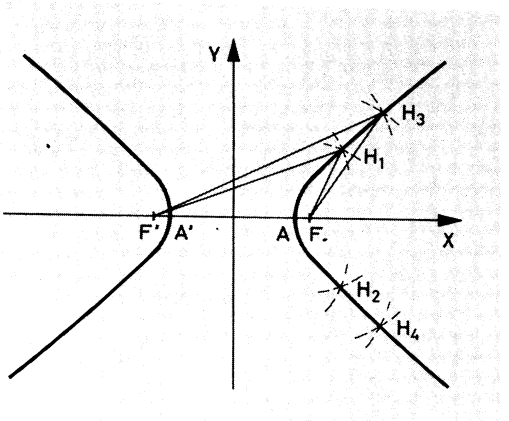


FIG. 3.40.

2. CIRCUNFERENCIAS DIRECTRICES Y TANGENTES

Como en el caso de la elipse, en la figura 3.41 se traza una circunferencia de radio $2a$ y centro en el foco F'. El otro foco F debe ser exterior a dicha circunferencia, llamada *directriz*. Se une F y un punto cualquiera C de la circunferencia. La mediatriz del segmento FC corta a la recta $F'C$ en un punto H de la hipérbola, ya que, al ser $\overline{CH}=\overline{FH}$, la diferencia de radios vectores es $2a$.

$$\overline{F'H}-\overline{FH}=\overline{F'H}-\overline{CH}=2a$$

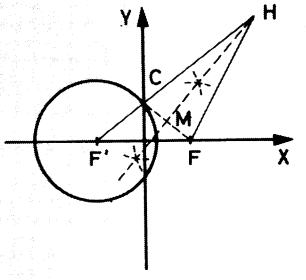


FIG. 3.41.

Según esto:

> El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una circunferencia y de un punto exterior a ella es una hipérbola.

La proposición recíproca también es cierta.

Ejercicio 46

Demuéstrese geométricamente que cualquier punto de la mediatriz MH, que se traza en la figura 3.42, *es «exterior» a la hipérbola, exceptuando el propio H.*

El ejercicio anterior justifica el trazado de tangentes por un punto de la curva con el método que se visualiza en la figura 3.42. Trácese la circunferencia directriz de centro en F'. Al unir F' con el punto H dado se corta a la directriz en un punto C. La mediatriz del segmento CF es la tangente pedida.

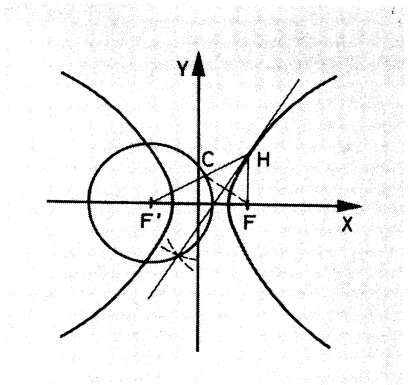


FIG. 3.42.

Ejercicio 47

Trácense las tangentes a la hipérbola desde un punto «exterior». Indicación: véase el mismo problema en el caso de la elipse (ejercicio 31).

La expresión analítica de la tangente por un punto $H(x_0, y_0)$ de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

viene dada por una ecuación sencilla. En efecto, por derivación implícita se obtiene la pendiente en H de la tangente.

$$\frac{2x_0}{a^2} - \frac{2y_0 y_0'}{b^2} = 0 \implies y_0' = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Y como pasa por H

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

Quitando paréntesis y denominadores y ordenando términos resulta que

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

Pero el segundo miembro de la igualdad vale 1 por pertenecer $H(x_0, y_0)$ a la hipérbola. En suma:

La ecuación de la tangente por un punto $H(x_0, y_0)$ de una hipérbola reducida a sus ejes es

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

Para hallar la ecuación de la tangente desde un punto culaquiera $Q(x_1 \cdot y_1)$ habrá que resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x_1x_0}{a^2} - \dfrac{y_1y_0}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

que, al tener una ecuación de segundo grado en las incógnitas x_0, y_0, puede tener dos, una o ninguna solución.

Ejercicio 48

Hállese el ángulo que forman las tangentes a la hipérbola $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ *por el punto* (0, 5).

No es difícil demostrar la siguiente curiosa propiedad de las hipérbolas:

> El punto medio del segmento de tangente comprendido entre dos asíntotas es el punto de contacto de la tangente con la hipérbola.

En efecto: Sean $T_1(x_1, y_1)$ y $T_2(x_2, y_2)$ los extremos del segmento sobre la tangente por $H(x_0, y_0)$. Se obtienen sus coordenadas resolviendo el doble sistema (Fig. 3.43):

$$T_1 \begin{cases} \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = \dfrac{b}{a}x \end{cases} \qquad T_2 \begin{cases} \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1 \\ y = -\dfrac{b}{a}x \end{cases}$$

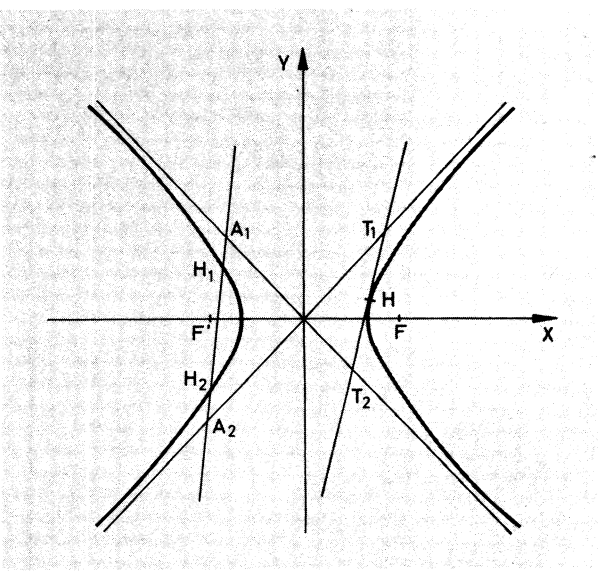


FIG. 3.43.

El resultado es

$$T_1\begin{cases} x_1=\dfrac{a^2b}{bx_0-ay_0} \\ y_1=\dfrac{ab^2}{bx_0-ay_0} \end{cases} \qquad T_2\begin{cases} x_2=\dfrac{a^2b}{bx_0+ay_0} \\ y_2=\dfrac{ab^2}{bx_0+ay_0} \end{cases}$$

Si llamamos $M(x_m, y_m)$ al punto medio del segmento $\overline{T_1T_2}$, sus coordenadas son:

$$M\begin{cases} x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}a^2b}{bx_0-ay_0}+\dfrac{\frac{1}{2}a^2b}{bx_0+ay_0}=\dfrac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}=\dfrac{a^2b^2x_0}{a^2b^2}=x_0 \\ y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}ab^2}{bx_0-ay_0}-\dfrac{\frac{1}{2}ab^2}{bx_0+ay_0}=\dfrac{a^2b^2y_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}=\dfrac{a^2b^2y_0}{a^2b^2}=y_0 \end{cases} H$$

Ejercicio 49

Demuéstrese sobre la figura 3.43 *que los segmentos de una secante* $\overline{H_1A_1}$ *y* $\overline{H_2A_2}$ *interceptados entre la hipérbola y las asíntotas son iguales.*

Razonar cómo la anterior propiedad sobre las tangentes es un caso particular de la propiedad reflejada en este ejercicio.

El ejercicio 49 sugiere un método muy simple para hallar puntos de una hipérbola de la que son conocidas las asíntotas y un punto H. Basta trazar rectas por H y transportar los segmentos $\overline{HA_1'}$, $\overline{HB_1}$, $\overline{HC_1}$, ..., sobre su misma recta soporte, de modo que el extremo H esté sobre la otra asíntota. Los puntos A_1', B_1', C_1' pertenecerán a la hipérbola. (Para trazar la otra rama bastará utilizar las simetrías conocidas.)

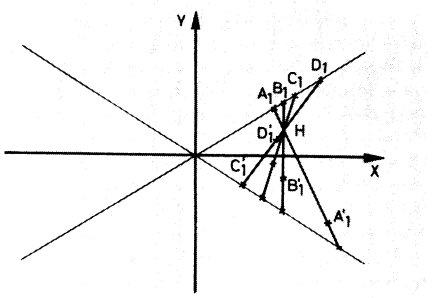


FIG. 3.44.

Ejercicio 50

La hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

se denomina hipérbola conjugada, *de la que tiene segundo miembro igual a* 1. *Hágase su gráfica y muéstrese que tiene los mismos ejes de simetría y las mismas asíntotas. Hállese también la relación entre sus excentricidades respectivas.*

3. SECCIONES DEL CONO

Planos paralelos al eje de revolución de un cono lo cortan determinando distintas hipérbolas, todas de la misma excentricidad, salvo si pasan por el origen, en cuyo caso la intersección es un par de rectas, precisamente dos generatrices del cono diametralmente opuestas.

El ángulo formado por este par de rectas es igual al ángulo que forman las asíntotas de las hipérbolas dichas.

Por otra parte, planos oblicuos respecto al eje de revolución con ángulo inferior a φ (Fig. 3.45), si no pasan por el vértice del cono. también determinan hipérbolas de menor excentricidad.

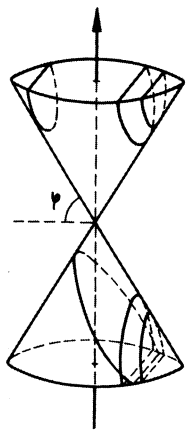


FIG. 3.45.

4. PROPORCIONALIDAD INVERSA: HIPERBOLAS EQUILATERAS REFERIDAS A SUS ASINTOTAS

Muchos fenómenos de la Naturaleza están ligados por una ley de proporcionalidad inversa. Por ejemplo, la presión P y el volumen V de un gas a temperatura constante: a mayor presión, menor volumen, y viceversa, de modo que el producto de presión y volumen se mantenga constante.

$$P \cdot V = K \quad \text{(ley de Boyle-Mariotte)}$$

Del mismo modo, para un voltaje constante V, la intensidad de corriente I es inversamente proporcional a la resistencia R de la corriente:

$$I \cdot R = V \text{ (constante)}$$

En ambos casos, cualquiera de las dos variables se puede expresar en función de la otra

$$P = \frac{K}{V},\ V = \frac{K}{P},\ I = \frac{V}{R},\ R = \frac{V}{I}$$

pero el dominio de estas funciones queda restringido no sólo por su campo de definición matemática, sino también por las realidades físicas que se manejan, pues, en principio, P, V, K y R han de ser positivos.

Haciendo abstracción de los fenómenos implicados, la relación matemática en estudio es

$$x \cdot y = k, \qquad \text{o bien,} \qquad y = \frac{k}{x}$$

Se trata, pues, de una función definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ y la figura 3.46 presenta la gráfica para el valor $k = 1$.

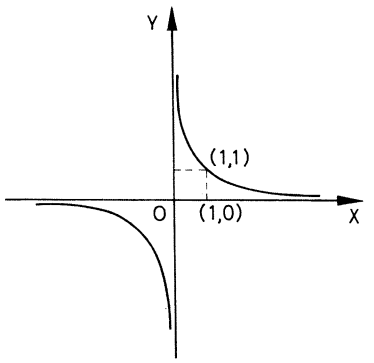


FIG. 3.46.

Ejercicio 51

Dibújense las gráficas de las funciones $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{6}{x}$.

La figura 3.47 presenta una hipérbola equilátera y, por tanto, $a = b$ y *excentricidad* $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Su ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

o, lo que es igual,

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad [15]$$

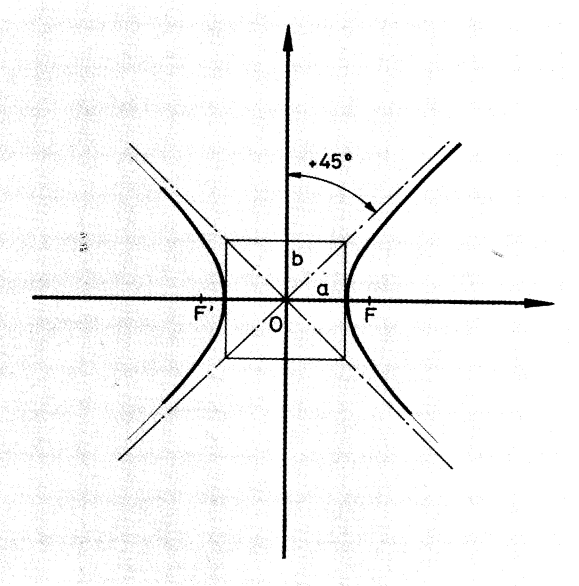


FIG. 3.47.

Si se gira $+45°$, los ejes se convierten en las asíntotas, y la nueva ecuación de la hipérbola referida a esos nuevos ejes se conseguirá mediante las ecuaciones del giro.

Un modo cómodo de hacerlo es (recuérdese la unidad 2) multiplicando el complejo $X+Yi$, de afijo (X, Y), por el complejo $[\cos(+45°), i\,\text{sen}(+45°)]$, cuyo producto dará el complejo $x+yi$, cuyo afijo lo forman las nuevas coordenadas de los puntos de la hipérbola.

$$(X+Yi)(\cos(+45)+i\,\text{sen}(+45))=x+yi$$

$$X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)X+Y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i-Y\frac{\sqrt{2}}{2}=x+yi$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{2}}{2}X-\dfrac{\sqrt{2}}{2}Y=x\\[2ex]\dfrac{\sqrt{2}}{2}X+\dfrac{\sqrt{2}}{2}Y=y\end{array}\right\}\pm$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow\ \sqrt{2}X=x+y\ \Longrightarrow\ X=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\\[2ex]\Longrightarrow\ \sqrt{2}Y=x-y\ \Longrightarrow\ Y=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\qquad[16]$$

Sustituyendo las [16] en la expresión [15], se obtiene:

$$\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x-y)^2}{2}=a^2\Longleftrightarrow 4xy=2a^2$$

$$xy=\frac{a^2}{2}$$

Si se hace $k=\frac{a^2}{2}$, entonces

$$\boxed{xy=k} \qquad [17]$$

La ecuación [17] es la de una hipérbola equilátera de semieje real $\sqrt{2k}$, referido a sus asíntotas como ejes.

Así, pues, las gráficas de la proporcionalidad inversa con que se inició este epígrafe eran hipérbolas equiláteras, referidas a sus asíntotas.

Ejercicio 52

Calcúlense ejes y excentricidad de la hipérbola $xy=8$. *Luego, escríbase la ecuación de esa hipérbola referida a sus ejes de simetría.*

Ejercicio 53

Expresar la ecuación de la hipérbola equilátera $X^2-Y^2=4$, *tomando como ejes cordenados sus asíntotas.*

Ejercicio 54

Demostrar que el área limitada por una tangente cualquiera a una hipérbola equilátera y las asíntotas es constante. (Indicación: se facilita el problema tomando como ejes las asíntotas.)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.3

40. $\frac{(-x)^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}=1$ es simétrico respecto de O.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}=1$ es simétrico respecto de OX.

$\frac{(-x)^2}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1$ es simétrico respecto de OY.

41. *a)* $x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$;
b) $(-a,0)$ y $(a,0)$.

42. $\left.\begin{array}{l} e=\frac{c}{a}=\sqrt{2} \\ c^2=a^2+b^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow b=a.$

43. $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=6 \\ b=2 \\ c^2=a^2+b^2=40 \Longrightarrow c=2\sqrt{5} \\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} F'(-2\sqrt{5},0) \\ F\,(2\sqrt{5},0) \end{array}$;

44. En la hipérbola equilátera $e=\sqrt{2} \Longrightarrow a=b$. El rectángulo central (Fig. 3.39) se convierte en un cuadrado, y sus diagonales, que son las asíntotas, son las bisectrices de los cuadrantes.

45. Si todas tienen las mismas asíntotas,

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

es porque los semiejes son proporcionales a a y a b; es decir, son hipérbolas de ecuación

$$\frac{x^2}{k^2a^2}-\frac{y^2}{k^2b^2}=1$$

La excentricidad es

$$e=\frac{\sqrt{k^2a^2+k^2b^2}}{ka}=\frac{k\sqrt{a^2+b^2}}{ka}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},$$

independiente de k, luego la misma para todas. Los focos de H_1 se encuentran más alejados del origen que los de H_2, y éstos, que los de H_3.

46. Sea P (Fig. 3.41) un punto cualquiera de la mediatriz MH. Entonces, $\overline{PF}=\overline{PC}$; por tanto,

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{PF'}-\overline{PC}$$

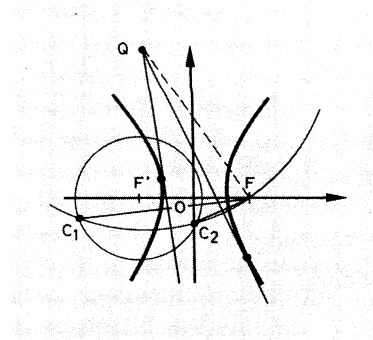


FIG. 3.48.

En el triángulo PCF',

$$\overline{PF'} - \overline{PC} < \overline{CF'} = 2a.$$

Así, pues, el punto P es «exterior» a la hipérbola.

47. Trácese circunferencia directriz, de centro en F' (Fig. 3.48).

La circunferencia de centro en Q y radio $\overline{QF}$ corta en C_1 y C_2 a la directriz.

Las mediatrices de los segmentos $\overline{FC_1}$ y $\overline{FC_2}$ pasan por Q y son las tangentes pedidas.

48. $\left.\begin{array}{l} t \equiv y - 5 = m(x-0) \\ h \equiv x^2 - 9y^2 - 36 = 0 \end{array}\right\} \; y = mx + 5$

$$x^2 - 9(mx+5)^2 - 36 = 0;$$

$$(1 - 9m^2)x^2 - 90mx - 261 = 0$$

$$\Delta = 8\,100\ m^2 + 4 \cdot 261\,(1 - 9\,m^2) = 0;$$

$$-1\,296\,m^2 + 1\,044 = 0 \left\{\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{\sqrt{29}}{6} \\ \\ m_2 = -\dfrac{\sqrt{29}}{6} \end{array}\right.$$

$$m_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{29}}{6}; \qquad m_2 = \operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{29}}{6}$$

La figura 3.49 recuerda el modo de hallar el ángulo de dos rectas.

$$\beta = \alpha + \varphi \implies \varphi = \beta - \alpha$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = -12\,\frac{\sqrt{29}}{7} = -9{,}23$$

$$\varphi = 96^\circ\ 10'\ 48''$$

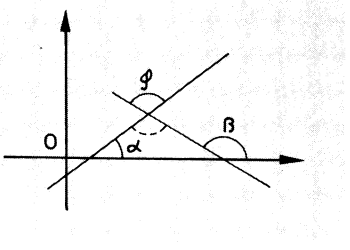


FIG. 3.49.

49. Basta probar que el punto medio del segmento A_1A_2 coincide con el medio de H_1H_2. Además, por estar los cuatro sobre una

recta es suficiente que cumplan lo dicho sus proyecciones sobre el eje OX; es decir, sus abscisas.

Del sistema formado por las secantes y las asíntotas, resulta:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx+n \\ y &= \pm\frac{b}{a}x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_1=\frac{an}{-am+b};\quad x_2=\frac{an}{-am-b};$$

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-a^2nm}{a^2m^2-b^2}$$

Análogamente, del sistema formado por la secante y la hipérbola,

$$\left.\begin{aligned} &y=mx+n \\ &\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2mn}{b^2-a^2m^2}$$

Ambos valores coinciden.

50. La representación es la de la figura 3.50.

La simetría, respecto de los ejes, resulta de la invarianza de la ecuación, al cambiar x por $-x$, o y por $-y$.

La gráfica muestra que las asíntotas coinciden.

La razón de excentricidades de la primera respecto de la segunda es a/b.

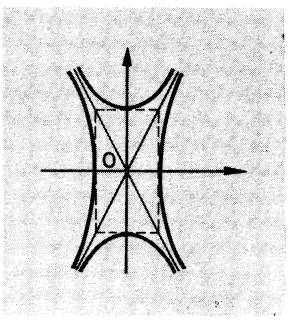


FIG. 3.50.

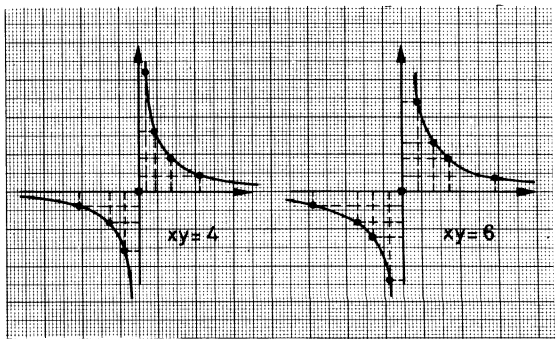


FIG. 3.51.

51.

$$xy=4 \Longrightarrow a=\sqrt{2k}=\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2}$$

52. $xy=8 \Longrightarrow a=\sqrt{2k}=\sqrt{2\cdot 8}=4=b; \qquad c=\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{2}.$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$$

$$\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{16}=1$$

53. $X^2-Y^2=4 \Longrightarrow a=b=2;\ k=\frac{a^2}{2}=\frac{4}{2}=2;\ xy=2.$

54. Como es sabido, el punto P es el punto medio del segmento $\overline{TT'}$, en la figura 3.52.

$$\overline{OT}=2y; \qquad \overline{OT'}=2x.$$

El área del triángulo rectángulo TOT' es:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y=2k=\text{constante},$$

puesto que por ser $P(x, y)$ de la hipérbola, $xy=k$.

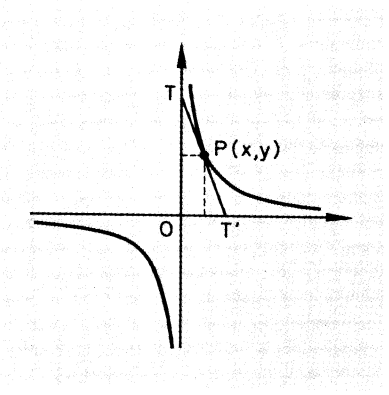


FIG. 3.52.

3.4

Parábola

1. DISTANCIA A UNA RECTA Y A UN PUNTO

En una referencia cartesiana OXY, tómese un punto $F(p/2, 0)$ llamado *foco,* y una recta paralela al eje OY cuya intersección D con el eje OX es simétrica de F respecto del origen. La denominaremos *recta directriz.*

Por otra parte, en el vértice B de una escuadra ABC de ángulo recto en A, se sujeta el extremo de un cordel de igual longitud que el cateto AB y el otro extremo se fija en el foco F. Apoyando un lápiz en la escuadra de modo que se mantenga tenso el cordel, como indica la figura 3.53, se dibuja un arco de curva, a medida que el cateto AC de la escuadra se desliza a lo largo de la recta directriz.

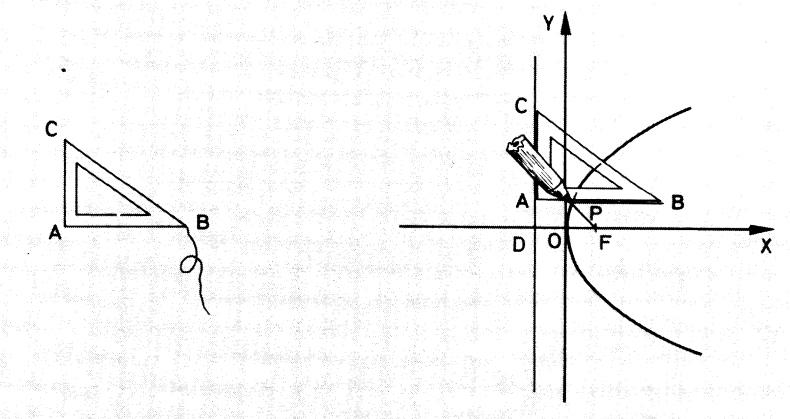


FIG. 3.53.

Los puntos $P(x, y)$ del arco en cuestión tienen la propiedad de que su distancia al foco es igual a su distancia a la recta directriz. En efecto, los radios vectores $\overline{AP}$ y $\overline{PF}$ miden igual, ya que, sumando a ambos $\overline{PB}$, se tiene la longitud del cateto AB. Entonces, definimos:

> Parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta (directriz) y de un punto fijo (foco).

Si se designa por p el valor absoluto de la longitud $\overline{DF}$, entonces el foco es el punto $F(p/2, 0)$ y la directriz tiene de ecuación $x = -p/2$. De este modo, la ecuación que cumplen las coordenadas de los puntos de la parábola $P(x, y)$ es:

$$\overline{AP} = x + p/2 = \overline{FP} = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$$

y, haciendo operaciones,

$$x^2 + px + p^2/4 = x^2 - px + p^2/4 + y^2$$

que, simplificando, da la ecuación reducida de la parábola

$$y^2 = 2px \qquad [18]$$

Ejercicio 55

Demuéstrese que el eje OX es eje de simetría de la curva dada. Compruébese que pasa por el origen, que resulta ser el punto de intersección de la parábola con su eje de simetría. A este punto se le llama vértice de la parábola. *Justifíquese que para* $x \to \infty$, $y \to \pm\infty$.

Ejercicio 56

Hállense el foco y la recta directriz de la parábola $y^2 = 10x$.

Ejercicio 57

En la figura 3.54 *se indica una manera de trazar la parábola por puntos. Las rectas* C_1, C_2 *y* C_3 *son paralelas a la directriz D y distan de ella* d_1, d_2 *y* d_3. *Por otra parte, con centro en F se han dibujado arcos de circunferencia* C_1', C_2' *y* C_3', *cuyos radios respectivos son también las distancias* d_1, d_2 *y* d_3.

1) *Justifíquese que los puntos de* $C_1 \cap C_1'$, $C_2 \cap C_2'$ *y* $C_3 \cap C_3'$ *pertenecen a la parábola.*

2) *Relaciónese este método con la obtención de una elipse por puntos que se desarrollaba en el ejemplo* 10 *del capítulo* 3.2.

Si el foco y la recta directriz no se eligen de la manera antes referida, la ecuación de la parábola ya no tiene la forma reducida, como muestra el siguiente ejemplo.

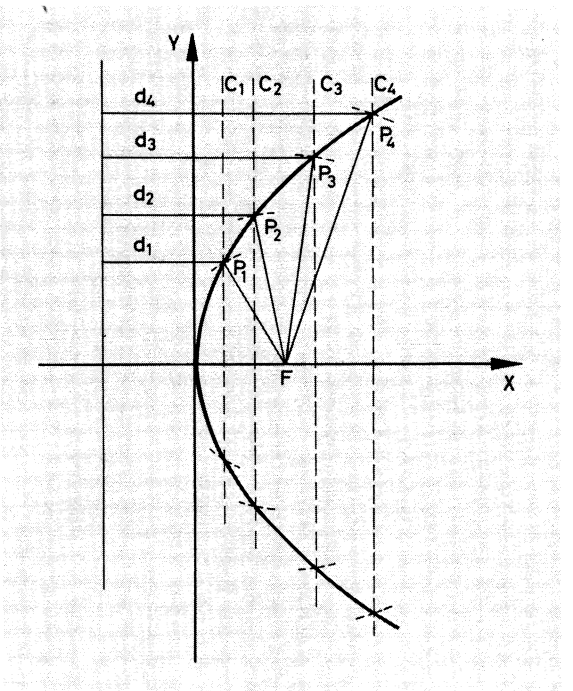


FIG. 3.54.

Ejemplo 12

Determinar la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $d \equiv x+y=3$ y por foco el punto $F(4, 4)$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola buscada:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$$

$$\overline{Pd} = \frac{x+y-3}{\sqrt{2}}$$

Igualando ambas distancias, elevamos al cuadrado

$$(x-4)^2+(y-4)^2 = \frac{(x+y-3)^2}{2}$$

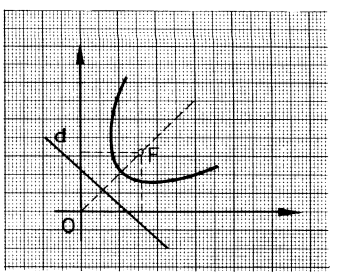


FIG. 3.55.

Operando y reduciendo términos, se obtiene la ecuación de la parábola propuesta, que es

$$x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 10y + 53 = 0.$$

Ejercicio 58

Obsérvese la figura 3.56. *Lo que se pide es que, usando la técnica de complejos, para girar, a partir de la* P_1, *se establezcan las ecuaciones de las cuatro parábolas que ahí aparecen.*

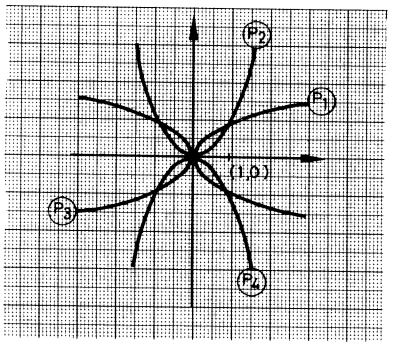


FIG. 3.56.

2. TANGENTES

Sea P un punto cualquiera de la parábola de la figura 3.57 y PD y PF sus radios vectores. Si unimos D y F, P ha de estar sobre la mediatriz del segmento $\overline{DF}$ por ser $\overline{PD} = \overline{PF}$, pero, además, dicha mediatriz es tangente por P a la parábola, ya que los demás puntos Q de la misma no pueden pertenecer a la parábola.

Por tanto, hemos resuelto el problema de trazar una tangente por un punto de la curva y simultáneamente hemos conseguido un nuevo método de obtención por puntos de la parábola; a saber, para cada punto D de la

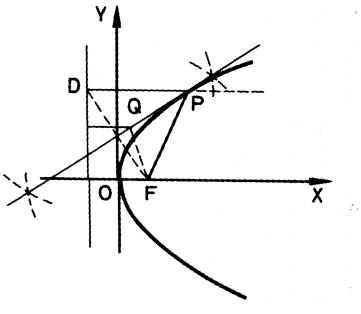


FIG. 3.57.

directriz se busca la intersección P de una paralela por D al eje OX con la mediatriz del segmento DF (en ambos casos la recta directriz y el foco son datos).

Ejercicio 59

Demuéstrese geométricamente que la recta tangente por un punto P de una parábola es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores. Enunciar una propiedad de los rayos emitidos desde un foco y reflejados en la curva. (Indicación: piénsese en la recta normal.)

Como las distancias interestelares se pueden considerar infinitas, los haces luminosos que nos llegan de ellas pueden estimarse paralelos, de modo que reflejados sus rayos en un paraboloide de revolución con el eje paralelo a la dirección del haz, todos quedan concentrados en el foco. Así, es posible percibir estrellas de luz muy tenue o concentrar eficazmente la energía solar.

También se comprende ahora lo propio que resulta llamar «parábolas» a las superficies especulares del interior de los focos de los coches.

Ejercicio 60

Hállese la ecuación de la trayectoria de un rayo reflejado en la parábola $y^2 = 10x$ procedente del foco en la dirección $y = 2x - 5$.

La ecuación analítica de la tangente por un punto $P(x_0, y_0)$ de la parábola $y^2 = 2px$ tiene una expresión sencilla. La pendiente vendrá dada por

$$2y_0y_0' = 2p \qquad y_0' = \frac{p}{y_0}$$

Como pasa por $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \qquad yy_0 - y_0^2 = px - px_0$$

pero se puede sustituir y_0^2 por $2px_0$; por tanto,

$$yy_0 - 2px_0 = px - px_0 \qquad \boxed{yy_0 = p(x + x_0)} \qquad [19]$$

Ejercicio 61

Hallar las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2 = 4x$ desde el punto $Q(0, 4)$. Los puntos de contacto (x_0, y_0) y (x_0', y_0') son desconocidos, pero son solución de un sistema de dos ecuaciones (una cuadrática) con dos incógnitas

Conocidos varios puntos de una curva, se suele aproximar su gráfica mediante un trazo «regular» y «continuo» que los una. Algo parecido se puede hacer si en vez de puntos se conocen varias tangentes. Bastará trazar una curva que se «adapte a ellas lo más regularmente posible». Se dice que la curva es la envolvente de la familia de tangentes dada (Fig. 3.58).

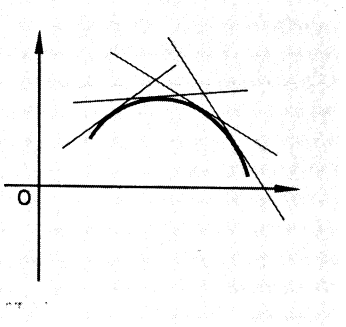


FIG. 3.58.

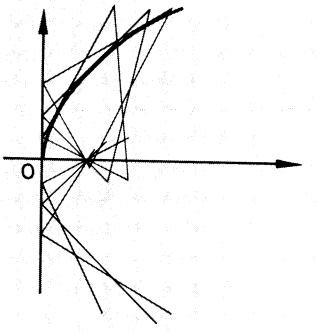


FIG. 3.59.

La figura 3.59 pone de relieve un método de construcción de la parábola $y^2 = 2px$, como envolvente de una familia de rectas tangenciales de trazado muy simple. Se toma el punto $F(p/2, 0)$ sobre el eje OX y se coloca una escuadra ABC de modo que el vértice A del ángulo recto esté sobre el eje OY mientras que el cateto $\overline{AB}$ se apoya en el foco F. Entonces la recta soporte del otro cateto AC es tangente a la parábola. Razónese.

Ejercicio 62

Compruébese que la recta $y = -x + 6$ es normal a la parábola $y^2 = 8x$. (Recuérdese que normal a una curva en un punto T es la recta perpendicular a la tangente en T a la curva.)

3. TRASLACION Y GIRO DE PARABOLAS

Las parábolas de eje paralelo al de abscisas y, consecuentemente, directriz paralela al de ordenadas tienen ecuaciones del tipo

$$x = ay^2 + by + c \qquad (a, b, c \in R) \wedge (a \neq 0)$$

Para conseguir dibujar sus gráficas, determinando sus elementos, es sencillo utilizar una traslación, hasta conseguir una ecuación reducida.

Ejemplo 4

Dada la parábola

$$x=\frac{1}{6}y^2-\frac{2}{3}y-\frac{7}{3},$$

hállense su foco, eje y directriz y, luego, dibújese.

Ha de intentarse poner en la forma

$$(y-m)^2=2p(x-n)$$

porque entonces sabremos el vector de la traslación (m, n).

$$\begin{gathered}6x=y^2-4y-14\\6x=y^2-4y+4-18\\6x=(y-2)^2-18\\(y-2)^2=6(x-3)\end{gathered}$$

El vértice, entonces, es el punto

$$V(3, 2); \qquad 2p=6.$$

El foco es el punto

$$F\left\{\begin{array}{l}x=3+p/2=\dfrac{9}{2}\\y=2+0=2\end{array}\right\}(9/2, 2)$$

y la directriz es la recta

$$x=3-p/2=\frac{3}{2}.$$

La gráfica es la de la figura 3.60.

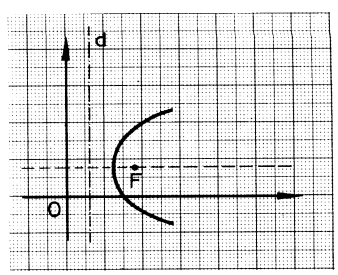


FIG. 3.60.

Ejercicio 63

Hállense el vértice, foco y directriz de la parábola $y^2+6y-8x-31=0$.

Si a la ecuación reducida de la parábola $Y^2=2pX$ se le gira $+90°$, usando la cómoda multiplicación de complejos por i, su gráfica se dispone como aparece en la figura 3.61, cuyos puntos $P(x, y)$ quedan ligados a los (X, Y) de la anterior mediante las ecuaciones del giro.

$$(X+Yi)\cdot i=x+yi$$

$$Xi-Y=x+yi \implies \begin{cases} X=y \\ Y=-x \end{cases}$$

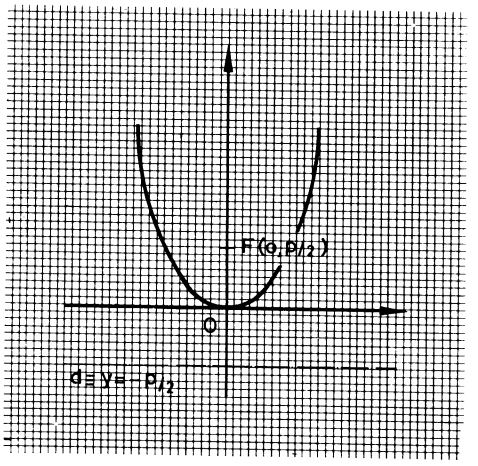


FIG. 3.61.

Sustituyendo en la ecuación inicial, se obtiene

$$(-x)^2=2py;$$

$$x^2=2py \qquad [20]$$

Si en lugar de ser el vértice el punto (0, 0), fuera el (m, n), entonces la ecuación [20] se transformaría en

$$(x-m)^2=2p(y-n) \qquad [20']$$

Al desarrollar y despejar, [20'] tomaría la forma

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a, b, c \in R) \wedge (a \neq 0) \qquad [21]$$

Así, pues, toda ecuación del tipo de [21] representa una parábola de eje paralelo al de ordenadas.

Ejemplo 15

Hállense el foco y la directriz de la parábola

$$y=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{11}{6}.$$

Luego, dibújese

$$6y=x^2-2x-11$$
$$6y=x^2-2x+1-12$$
$$6y+12=(x-1)^2$$
$$6(y+2)=(x-1)^2; \qquad 2p=6;\ p=3$$

El vector traslación es el $(1,-2)$; por tanto:

$$F\left\{\begin{matrix} x=0+1=1 \\ y=-2+p/2=-1/2 \end{matrix}\right\}(1,-1/2)$$

directriz:

$$y=-2-p/2=-\frac{7}{2}.$$

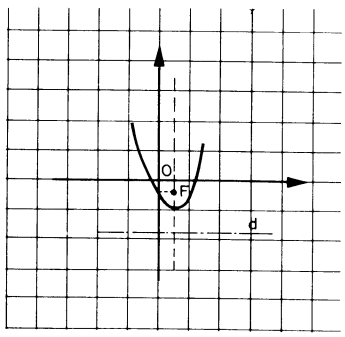


FIG. 3.62.

Ejercicio 64

Calcúlense el foco, vértice y directriz de la parábola

$$x^2-4x-4y=0.$$

4. SECCION DEL CONO

La parábola se obtiene como intersección del cono con un plano, si éste no pasa por el vértice y es paralelo a una generatriz. También ahí se pone de manifiesto que la parábola es límite de las secciones que dan elipses,

pero también, por otra parte, resulta ser límite de las secciones que dan hipérbolas.

Hasta ahora hemos prescindido de las secciones cónicas originadas por planos que pasan por el vértice del cono. Se las denomina «cónicas degeneradas» y se reducen a cuatro casos:

1. La intersección es sólo el vértice.
2. La intersección es un par de rectas concurrentes en el vértice.
3. La intersección es una sola recta que se considera doble, por ser el plano sector tangente al cono en ella (caso límite de los dos anteriores).
4. La intersección son dos rectas paralelas [caso límite para un cono con vértice en el infinito (cilindro)].

Es fácil comprobar que las ecuaciones reducidas de estas cónicas en el plano son polinomios de segundo grado en dos variables. Con ello, resulta que todas las ecuaciones reducidas de las cónicas son polinomios de segundo grado en dos variables. Esta característica se mantiene frente a cualquier cambio de ejes. La afirmación recíproca también es correcta.

La ecuación general de segundo grado en dos incógnitas es:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Fy + G = 0$$

en donde A, B, C, D, E, F y G son números reales cualesquiera. El conocimiento de estos coeficientes permite identificar el tipo de cónica de que se trata, pero la técnica de clasificación rebasa las posibilidades de este curso.

5. TRAYECTORIAS DE LANZAMIENTO

En primera aproximación, las trayectorias de las flechas, bombas, piedras y discos son parábolas. No es que no se cumplan las leyes de Kepler para campos gravitatorios, que exigiría que fuesen elipses, sino que los movimientos son tan cortos en el espacio y en el tiempo que el hecho de suponer constante la fuerza de la gravedad, tanto en magnitud como en dirección, simplifica enormemente el estudio, sin casi alterar los resultados.

Haciendo coincidir el origen de tiempos y espacios en $O(0, 0)$, la Física nos ofrece las siguientes ecuaciones paramétricas de la trayectoria en función del tiempo, según las leyes del movimiento uniforme y uniformemente acelerado.

$$\left.\begin{aligned} x &= V_{x_0} \cdot t \\ y &= V_{y_0} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned}\right\} \qquad [22]$$

en las que $V_0(V_{x_0}, V_{y_0})$ es el vector velocidad inicial (Fig. 3.63).

Entonces, siendo α el ángulo de tiro,

$$V_{x_0} = V_0 \cdot \cos \alpha$$
$$V_{y_0} = V_0 \operatorname{sen} \alpha$$

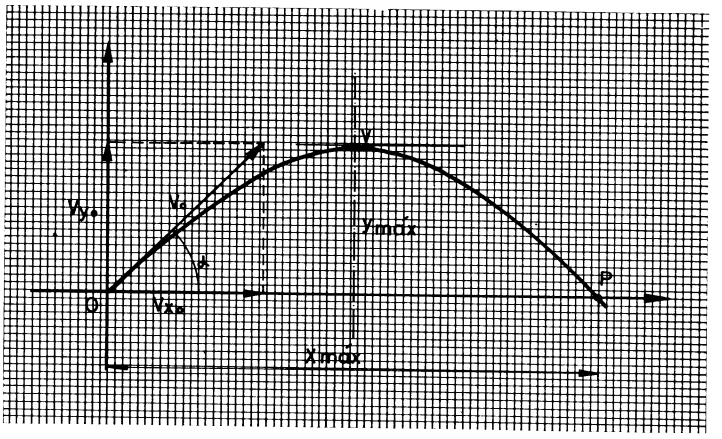


FIG. 3.63.

Puestos en [22], queda

$$\left.\begin{aligned} x &= V_0 t \cos\alpha \\ y &= V_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \qquad [22']$$

Despejando t en la primera ecuación y sustituyéndolo en la segunda, se tiene:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}; \qquad y = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} \qquad [23]$$

La ecuación es claramente, [23], la de una parábola de eje paralelo al de ordenadas de las del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

en la que los coeficientes son

$$a = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}; \qquad b = \operatorname{tg}\alpha; \qquad c = 0$$

El valor nulo del término independiente reafirma el planteamiento inicial del punto de lanzamiento en $O(0, 0)$; es decir, pasa por el origen.

Si se desea hallar el alcance máximo del tiro en nivel horizontal, basta hacer en [23] $y = 0$. Entonces,

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha} = 0 \implies x\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x\right) = 0$$

$$\implies \begin{cases} x = O \text{ (origen)} \\ \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x = 0 \implies x_{máx} = \dfrac{V_0^2 \cdot 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g} \iff \end{cases}$$

$$\boxed{x_{máx} = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha}$$

Otro modo de cálculo consistiría en hacer $y=0$ en la segunda ecuación paramétrica y sustituir el valor de t en la primera.

Si lo que se pretende es saber la altura máxima del tiro, puesto que la parábola es simétrica respecto de su eje, basta calcular la ordenada de V sustituyendo en [23] su abscisa, que es

$$x_v=\frac{0+x_{máx}}{2}=\frac{V_0^2\,\text{sen}\,2\alpha}{2g}$$

$$y_{máx}=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{V_0^2\,2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2g}-\frac{1}{2}g\frac{V_0^4\,4\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{4g^2V_0^2\cos^2\alpha}=$$

$$=2\frac{V_0^2}{2g}\cdot\text{sen}^2\alpha-\frac{V_0^2}{2g}\text{sen}^2\alpha;$$

$$\boxed{y_{máx}=\frac{V_0^2\,\text{sen}^2\alpha}{2g}}$$

También puede realizarse el cálculo entendiendo que el móvil tarda en llegar a V la mitad de tiempo que tarda en alcanzar P. Sustituido ese tiempo de la segunda ecuación paramétrica se halla la altura máxima.

Ejercicio 65

Determínense la altura máxima y el alcance horizontal de un tiro de ángulo $\alpha=60°$ *y* $V_0=30$ *m/seg. (Tómese* $g=10\ m\cdot s^{-2}$.*)*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 3.4

55. $(-y)^2=2px \Longrightarrow OX$ es eje de simetría.

56. $y^2=10\,x$; $\quad 2p=10$; $\quad F\left(\frac{p}{2},\,0\right)=\left(\frac{5}{2},\,0\right)$; $\quad D\equiv x-\frac{5}{2}=0.$

57. Sobre la figura 3.54 se observa que el punto P_1 dista d_1 de F, por estar en la circunferencia C_1', y también dista d_1 de la directriz, por estar sobre la recta C_1. Por tanto, pertenece a la parábola, pues equidista de foco y directriz. Análogamente, P_2 y P_3, intersecciones respectivas de C_2 y C_2' y de C_3 y C_3'.

El procedimiento es análogo al ejemplo 3.10, en el que uno de los arcos de circunferencia está sustituido por una recta.

58. $P_1\equiv y^2=x$; $\quad (x+yi)\cdot i=xi-y=x'+y'i\left\{\begin{matrix}x=y'\\y=-x'\end{matrix}\right\}P_2\equiv(-x')^2=y'$

$$\Updownarrow$$

$$x'^2=y'$$

$$(x'+y'i)\cdot i = x'i - y' = x'' + y''i \left\{ \begin{matrix} x' = y'' \\ y' = -x'' \end{matrix} \right\} P_3 \equiv y''^2 = -x''$$

$$(x''+y''i)\cdot i = x''i - y'' = x''' + y'''i \left\{ \begin{matrix} x'' = y''' \\ y'' = -x''' \end{matrix} \right\} P_4 \equiv (-x''')^2 =$$

$$= -y''' \iff x'''^2 = -y'''$$

59. Basta observar en la figura 3.64 que el triángulo *DPF* es isósceles ($\overline{PD} = \overline{PF}$) y que, al ser la tangente en *P* mediatriz de $\overline{DF}$, también es bisectriz del ángulo en *P*, formado por los radios vectores.

Los rayos emitidos desde un foco y reflejados en la curva salen formando un haz de rayos paralelos, ya que la normal en cada punto biseca al ángulo *FPA*, cumpliéndose la ley de la reflexión.

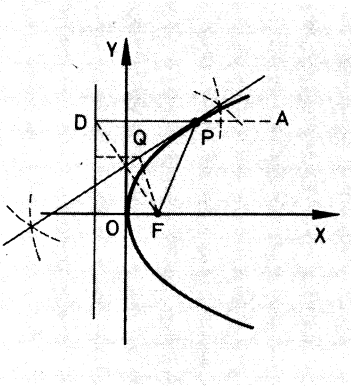


FIG. 3.64.

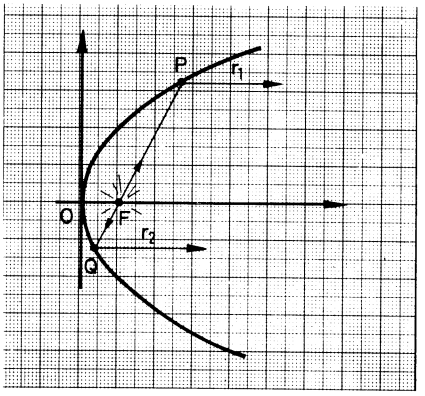


FIG. 3.65.

60.

$$\left. \begin{matrix} y^2 = 10x \\ y = 2x - 5 \end{matrix} \right\} (2x-5)^2 = 10x \implies \left\{ \begin{matrix} P\left(\dfrac{15+5\sqrt{5}}{4}, \dfrac{5+5\sqrt{5}}{2} \right) \\ Q\left(\dfrac{15-5\sqrt{5}}{4}, \dfrac{5-5\sqrt{5}}{2} \right) \end{matrix} \right.$$

$$r_1 \equiv y = \frac{5+5\sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 \equiv y = \frac{5-5\sqrt{5}}{2}$$

61. La tangente t_2 es, obviamente, el eje de ordenadas, $x = 0$. Para calcular la $t_1 \equiv (y-4) = m(x-0)$

$$\left. \begin{matrix} y^2 = 4x \\ y = mx + 4 \end{matrix} \right\} (mx+4)^2 = 4x$$

$$m^2x^2 + (8m-4)x + 16 = 0$$

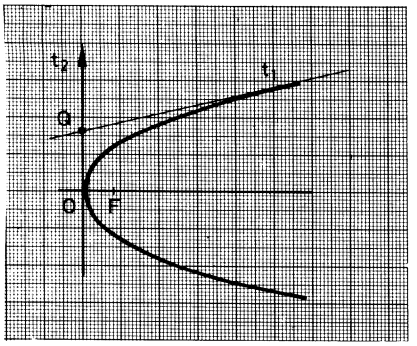


FIG. 3.66.

$$\Delta = (8m-4)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 16 = 0$$

$$-64m + 16 = 0 \Longrightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$t_1 \equiv y - 4 = \frac{1}{4}x$$

62.

$$\left.\begin{array}{l} n \equiv y = -x + 6 \\ P \equiv y^2 = 8x \end{array}\right\} n \cap P = \left\{\begin{array}{l} T_1(18, 12) \\ T_2(2, 4) \end{array}\right.$$

Sólo en T_2 la recta n es normal, ya que

$$2yy' = 8 \Longrightarrow y' = \frac{8}{2y}; \qquad \left.\begin{array}{l} y'_{T_2} = \dfrac{8}{8} = 1 \\ m_n = -1 \end{array}\right\} \text{c. q. d.}$$

63. $y^2 + 6y - 31 = 8x$; $(y+3)^2 - 40 = 8x$; $(y+3)^2 = 8(x+5)$;
$V(-5, -3)$; $2p = 8 \Longrightarrow p/2 = 2$; $F(-5 + p/2, -3) = (-3, -3)$;
$d \equiv x = -5 - p/2 = -7$.

64. $x^2 - 4x + 4 = 4y + 4$; $(x-2)^2 = 4(y+1) \Longrightarrow V(2, -1)$;
$2p = 4 \Longrightarrow p/2 = 1$; $F(2, -1 + p/2) = (2, 0)$;
$d \equiv x = -1 - p/2 = -2$.

65. $x = 30 \cos 60° \, t$; $x = 15\,t$;

$$y = 30 \operatorname{sen} 60° \, t - \frac{1}{2} g t^2; \qquad y = 10\sqrt{3}\,t - 5\,t^2;$$

$$0 = 10\sqrt{3}\,t - 5\,t^2; \quad t(10\sqrt{3} - 5\,t) = 0 \left\langle \begin{array}{l} t = 0 \text{ (origen)} \\ t = 2\sqrt{3} \text{ s.} \end{array}\right.$$

$$x_{\text{máx}} = 15 \cdot 2\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \text{ m.}$$

La mitad del tiempo de alcance de $x_{máx}$ es el que se gasta para llegar a la altura máxima. Así,

$$y_{máx} = 10\sqrt{3}\,\frac{2\sqrt{3}}{2} - 5\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 15 \text{ m.}$$

3.5

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Hállese la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ que pasando por el origen tiene por centro un punto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

2. Determínese la ecuación de la circunferencia que contiene a los puntos $P(2,1)$ y $P(-2,3)$ y su centro está en la recta $x+y4=0$.

3. Hállese el punto P', simétrico del $P(4,2)$ respecto de la recta $y-2x+3=0$. Luego, calcúlese la ecuación de la circunferencia a la que pertenecen P, P' y el origen.

4. Establézcase la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $y=2x+9/4$ y pasa por los puntos $A(2,2)$ y $B(1,2)$.

5. Calcúlese la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices de las afijas son las de las soluciones de la ecuación $z^3=8$.

6. Determínese la ecuación de la circunferencia concéntrica a la

$$x^2+y^2+6x-4g=1,$$

sabiendo que pasa por $P(1,4)$.

7. Hállese la ecuación de la circunferencia tangente al eje OX en el punto $T(6,0)$, sabiendo que la recta $4x+3y-64=0$ es otra tangente suya.

8. Determínese el valor de k en $y=-3x+k$ para que la recta sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$.

9. Hállense las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=25$, paralelas a la recta $3x+4y=0$.

10. Una circunferencia pasa por el origen y por $A(12,5)$, siendo tangente a la recta $g=-x$. Determínese su ecuación.

11. Dadas las circunferencias

$$C_1 = 2x^2 + 2y^2 - 3x - 8y - 10 = 0$$
$$C_2 = x^2 + y^2 = 16,$$

encuéntrese un punto A que tenga igual potencia respecto de ambos y que equidiste de los ejes de coordenadas.

12. Determínese la ecuación de la circunferencia transformada de la

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

en una traslación de vector $V(3, -2)$.

13. Hállese la ecuación reducida de la elipse de $e = 3/5$ y que pasa por el punto $A(3, 4)$.

14. Dada la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{g} = 1$:

a) hállese la ecuación de la trasladada, según $V(1, 2)$;
b) determínese la ecuación de la cónica girada 45°;
c) calcúlese la ecuación que tendría, referida a las bisectrices de los cuadrados como ejes.

15. Las distancias a los focos de un punto A de una elipse son 2 y 8 cm. El parámetro c de la cónica mide 3 cm.

a) Determínese su ecuación reducida;
b) hállese el área del triángulo formado por las tangentes en los puntos de $x = 4$ y la cuerda que une sus puntos.

16. Hállense los focos de la hipérbola

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{62} = 1$$

y la ecuación de la tangente en el punto de abscisa -10 y ordenada positiva.

17. Dada la ecuación reducida de la hipérbola, búsquense las ecuaciones de sus asíntotas.

18. Descúbrase qué cónica es la de ecuación $y^2 = 4x^2 - 4$ y determínense sus elementos.

19. Calcúlese el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 6x$ con las bisectrices de los cuadrantes.

20. Establézcase la ecuación de la parábola de foco $F(a, 0)$ y directriz $d = y = mx$.

21. Hállense los puntos que equidistantes de $A(-3, -2)$ y $B(7, 4)$, pertenecen a la parábola $x = y^2 - 5y + 6$.

22. Averígüese la ecuación de la parábola que pasando por el origen tiene por cuerda el segmento AA', de extremo $A(1, 3)$ y $A'(-1, -1)$.

23. Calcúlese la ecuación de la parábola de eje paralelo al de ordenadas, sabiendo que un vértice es el punto $V(8, 5)$ y que pasa por el punto $A(4, -4)$.

24. Determínense las ecuaciones de las tangentes y normales a la parábola $y = x^2 - 5x + 5$ en los puntos igual abscisa que ordenada.

25. Dada la parábola $2y = x^2 - 4x + 4$, encuéntrese un punto A de la curva en el que la tangente sea perpendicular a la recta OA.

26. Calcúlense el eje, directriz, foco y vértice de la parábola $y = x^2 + 2x - 15$.

27. Dada la curva $x^2 = 4y$ y la recta $3x - 4y + 4 = 0$, hállese el ángulo que forman las tangentes a esa curva en sus intersecciones con la recta dada.

28. Demuéstrese que los valores de las derivadas de la función $y = 3x^2 - 7$ en sus puntos son directamente proporcionales a las abscisas correspondientes.

29. Calcúlense las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^2 + 1$, desde el origen de coordenadas.

30. Calcúlese el área del triángulo formado por dos ejes de coordenadas y la tangente en $x = 3$ a la parábola $y = -x^2 + 5x - 4$.

3.6

Autoevaluación A-3

1. La ecuación $x^2 - y^2 = 16$ corresponde a una

a) circunferencia de radio 4;
b) circunferencia degenerada.
c) parábola;
d) hipérbola equilátera.

2. La ecuación $y = \frac{3}{x}$ es la de una

a) hipérbola equilátera;
b) recta paralela a la bisectriz del primer-tercer cu ntes;
c) asíntota de hipérbola;
d) cónica degenerada.

3. La circunferencia $x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 8y = 25$

a) tiene de radio 5;
b) tiene su centro en $C(-2, -4)$;
c) tiene su centro en $(1, -2)$;
d) es que no es una circunferencia.

4. El centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo, dos de cuyos ángulos son 30° y 60°, es

a) el vértice del ángulo mayor;
b) el punto medio del lado mayor;
c) un punto interior al triángulo;
d) $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5. Si $C_1(x, y)=0$ y $C_2(x, y)=0$ son las ecuaciones de dos circunferencias y, siendo $P(a, b)$, sucede que $C_1(a, b)=C_2(a, b)>0$, se puede asegurar que

a) se trata de la misma circunferencia;
b) P es punto común a ambas;
c) los segmentos de tangentes desde P a ambas tienen la misma longitud;
d) la potencia igual es 0.

6. Si el sistema de dos circunferencias $C_1(x, y)=0$ y $C_2(x, y)=0$ tiene dos soluciones, el eje radical de ambas es

a) la secante común;
b) la tangente común;
c) la línea de centros;
d) la mediatriz del segmento entre centros.

7. Dada la circunferencia $(x-a)^2+(g-b)^2=3$, la potencia del punto $P(a, b)$, respecto de ella, es

a) cero;
b) el radio;
c) 3;
d) -3.

8. Los semiejes de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=2$, valen

a) 3 y 4;
b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $2\sqrt{2}$;
c) 4 y 3;
d) es que no es una elipse.

9. La excentricidad de una elipse es $\sqrt{2}$, por lo que se puede asegurar que

a) es equilátera;
b) $c=a\sqrt{2}$;
c) $\operatorname{tg}\frac{b}{a}=45°$;
d) no es una elipse.

10. Todos los puntos que distan igual de una circunferencia que de su centro pertenecen

a) al diámetro;
b) a una elipse;
c) a una circunferencia concéntrica;
d) a dos elipses simétricas respecto del centro.

11. La ecuación $\frac{2x}{3^2}+\frac{\sqrt{5}y}{3}=1$ es la de

a) una elipse particularizada por el punto $\left(2,\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$;

b) una tangente a la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}1$;

c) una de las dos tangentes a la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ en el punto (2, 3);

d) una recta de pendiente $2/\sqrt{5}$.

12. Si se dispone un espejo perpendicular por el origen al eje de abscisas, entre la parábola $y^2=8(x-3)$ y su imagen

a) forman una hipérbola;
b) se crea una hipérbola equilátera;
c) aparecen, sencillamente, dos parábolas simétricas;
d) resulta la hipérbola $y^2=\pm 8(x-3)$.

13. De una hipérbola de excentricidad $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ se puede asegurar que

a) no existe;
b) es equilátera;
c) sus asíntotas se cortan bajo ángulo de 45°;
d) sus semiejes real e imaginario son iguales.

14. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de la circunferencia C y del punto A, tal que Pot $A_{(C)}>0$ es

a) otra circunferencia concéntrica;
b) una elipse;
c) una parábola de foco en el centro de C;
d) una hipérbola.

15. Los dos semiejes de la hipérbola $x^2-y^2=3$ miden

a) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$;
b) $\sqrt{3}$;
c) 1 y 1;
d) eso no es una hipérbola.

16. En la hipérbola $xy=2$ las longitudes de sus semiejes son

a) $\sqrt{2}$;
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) 2;
d) 1.

17. Las asíntotas de la hipérbola $xy=k$ tienen por ecuaciones

a) $y=x;\ y=-x;$

b) $x=0;\ y=0;$

c) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x;\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x;$

d) $y=\pm\sqrt{2}x.$

18. Las asíntotas de la hipérbola $x^2-y^2=2$ son

a) $y=\pm x;$

b) $x=0;\ y=0;$

c) $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x;$

d) $y=\pm\sqrt{2}x.$

19. El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto y una recta que no pasa por él es

a) una hipérbola;
b) una parábola;
c) una circunferencia directriz;
d) un haz de rectas paralelas.

20. Al girar la parábola $y^2=4x$ un ángulo se obtiene la curva $x^2=-4y$. El ángulo girado es

a) $\alpha=27°;$
b) $\alpha=90°;$
c) $\alpha=180°;$
d) $\alpha=-180°.$

21. El eje de la parábola $P\equiv y=x^2+17x-23$ es la recta r y su directriz d. Entonces,

a) $r\cap\overline{OX}=\phi;$
b) $r\cap\overline{OY}\neq\phi;$
c) $r\cap P=$ foco;
d) $r\cap d=$ vértice.

22. La recta $4y=4(x+2)$ es tangente a la parábola

a) $y^2=\frac{4}{4}(x-2);$

b) $x^2=\frac{4}{4}y;$

c) $y^2=8x;$

d) $x^2=\frac{1}{8}y.$

23. Al girar $-90°$ la parábola $x^2=2py$ se obtiene la

a) $y^2=2px$;
b) $x^2=-2py$;
c) $y^2=-2px$;
d) $x^2=2py$.

24. La elipse E tiene por vértices en el eje menor los puntos B y B', siendo C la circunferencia de centro el de E y radio a, y r una recta tal que $(B \in r) \wedge (r // \overline{OX})$; las proyecciones sobre el eje mayor de las intersecciones $r \cap C$ son

a) los vértices en el eje mayor;
b) los focos de la elipse;
c) los puntos medios de $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$;
d) los focos de una hipérbola equilátera.

25. Cuando en una elipse sucede que $c=a$, se trata de

a) una circunferencia;
b) una hipérbola equilátera;
c) una parábola;
d) un segmento rectilíneo.

26. Si $c=0$, la elipse se convierte en

a) una circunferencia;
b) una hipérbola equilátera;
c) una parábola;
d) una recta.

27. Si una cónica tiene su excentricidad nula, se trata de

a) una hipérbola equilátera;
b) una elipse ideal;
c) una circunferencia;
d) dos rectas que se cortan.

28. La elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

se convierte en la circunferencia $x^2+y^2=1$ al proyectarla sobre un plano que forma con ella un ángulo de

a) $60°$;
b) $30°$;
c) $\pi/2$;
d) no es posible el planteamiento.

29. Si r es mediatriz de $\overline{FA}$, siendo F un foco de la elipse y A un punto de la circunferencia directriz de centro F', se puede asegurar que r

a) es una recta normal a la elipse;
b) coincide con la dirección del eje mayor de la elipse;
c) es tangente a la elipse;
d) es un radio vector.

30. Siendo α un plano y e el eje de un cono de revolución, la sección producida por α en el cono, si $\alpha // e$, es

a) una circunferencia;
b) una elipse;
c) dos parábolas;
d) una hipérbola.

31. Determínese la ecuación de la circunferencia, uno de cuyos diámetros es el segmento de extremos $A(2, 3)$ y $B(6, 11)$.

32. Calcúlense las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia de centro $(3, 0)$ y radio 3, desde el punto $(-3, 0)$.

33. Hállese la ecuación del eje radical de las circunferencias

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{y} \quad 2x^2 + 2y^2 - 3x + y = 5$$

34. Establézcase la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes de coordenadas, cuyo centro se encuentra en la recta $x + y = 3$.

35. Hállense los semiejes, focos y tangente en el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{4}{3}\right)$ a la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

36. Calcúlense los focos y la excentricidad de la hipérbola

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

37. Hállense los ejes y excentricidad de la hipérbola $xy = 8$, luego escríbase la ecuación de esa cónica referida a sus ejes de simetría.

38. Calcúlese la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $d = x + y = 3$ y por foco el punto $F(4, 4)$.

39. Si el lugar geométrico de las afijas de los complejos Z es $y^2 = 5x$, calcúlese el lugar geométrico de las afijas de los complejos $Z' = z \cdot i$.

40. Descríbase y realícese el trazado de una tangente a la parábola en uno de sus puntos.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-3

1. *d).*	**7.** *d).*	**13.** *a).*	**19.** *b).*	**25.** *d).*
2. *a).*	**8.** *b).*	**14.** *d).*	**20.** *a).*	**26.** *a).*
3. *d).*	**9.** *d).*	**15.** *b).*	**21.** *b).*	**27.** *c).*
4. *b).*	**10.** *c).*	**16.** *c).*	**22.** *c).*	**28.** *a).*
5. *c).*	**11.** *b).*	**17.** *b).*	**23.** *a).*	**29.** *c).*
6. *a).*	**12.** *c).*	**18.** *a).*	**24.** *b).*	**30.** *d).*

31. Véase la solución del ejercicio 1.

32. Coincide con el ejemplo 3.

33. Consúltese la solución del ejercicio 19.

34. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

35. $a=3$; $b=2$; $F(\sqrt{5},0)$; $F'(-\sqrt{5},0)$;
$t=\frac{\sqrt{5}}{9}x+\frac{1}{3}y=1$.

36. Véase la solución del ejercicio 43.

37. Coincide con el ejercicio 52.

38. Es el ejemplo 12.

39. Consúltese la solución del ejercicio 58.

40. La figura 3.48 contiene la solución.

UNIDAD TEMATICA 4

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

4.1. Aproximación lineal. Derivada y diferencial

1. *Aproximación lineal. Funciones tangentes*
2. *Generalización de los conceptos de tangencia y de aproximación*
3. *Curvas osculatrices. Radio de curvatura*
4. *Diferencial en un punto* a
5. *Diversas notaciones de la diferencial en un punto* a
6. *Función diferencial*

4.2. Estudio local de funciones. Gráficas

1. *Derivación y continuidad*
2. *Derivada en un punto y monotonía. Extremos locales*
3. *Teorema de Rolle*
4. *Teorema del valor medio*
5. *Teorema de Cauchy y regla de L'Hôpital*
6. *Concavidad y convexidad. Inflexiones*
7. *Estudio de la gráfica de la función*
8. *Optimización*

4.3. Integral indefinida

1. *Funciones primitivas*
2. *Integrales inmediatas*
3. *Método de integración*
   - 3.1. Inclusión bajo el signo diferencial
   - 3.2. Sustitución de la variable de integración
   - 3.3. Método de integración por partes

4.4. Integral definida. Area

1. *Integración de funciones escalonadas positivas*
2. *Integral de funciones continuas, positivas y monótonas*
3. *Regla de Barrow*
4. *Aplicaciones de la integral definida*

4.5. Ejercicios y problemas de recapitulación

4.6. Autoevaluación A-4

4.1

Aproximación lineal. Derivada y diferencial

1. APROXIMACION LINEAL. FUNCIONES TANGENTES

Con frecuencia resulta muy ventajoso sustituir una función complicada por otra más sencilla que se le «aproxime».

De todas las posibles técnicas de aproximación, nos interesa la *local,* es decir, la que se limita a un entorno de un punto prefijado a.

Dos funciones, f y g, son *tangentes* en un punto a si

1. $f(a)=g(a)$.
2. $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-g(a+h)}{h}=0.$

[1]

La condición 2 pone de manifiesto que no sólo el numerador tiende a cero, cuando lo hace h, sino que lo hace más rápidamente. En otros términos: al sustituir una función por otra que la aproxima, para una variación pequeña (de a a $a+h$) el error que se comete es inferior a la variación de h.

Ejemplo 1

La parábola $y=f(x)=x^2+x-1$ y la «cúbica» $y=g(x)=x^3+x^2-2x+1$ son tangentes en el punto $x=1$. En efecto,

1) $f(1)=1^2+1-1=1.$
$g(1)=1^3+1^2-2\cdot 1+1=1.$

2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-g(1+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+(1+h)-1-(1+h)^3-(1+h)^2+2(1+h)-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(1+h)^3+3(1+h)\cdot 2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1-3h-3h^2-h^3+3+3h-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h^2-h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(-3h-h^2)=0.$$

Se pretende hallar una recta que sea tangente en el punto $x=2$ a la curva

$$y=g(x)=x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x.$$

La recta deberá pasar en primer lugar por el punto $(2, g(2))$, por la condición 1. La ecuación del haz de rectas que pasan por este punto es

$$y-g(2)=m(x-2)$$

Al imponer la condición 2 se llega a la siguiente expresión para m

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-m(2+h-2)-g(2)}{h}=0$$

equivalente a la expresión:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$$

Es decir, se llega a un resultado ya conocido: la pendiente de la tangente en un punto es igual a la derivada —si existe— de la función en el punto.

En nuestro caso, como $g(2)=2$ y $g'(2)=1-\frac{\pi}{2}$, la recta tangente es

$$y-2=\left(1-\frac{\pi}{2}\right)(x-2)$$

Ejercicio 1

Compruébese que coinciden las derivadas de las dos funciones del ejemplo 1 en el punto de tangencia. Demostrar en general que si las dos funciones son derivables, la condición 2 se puede sustituir por la condición de que las derivadas en el punto sean iguales.

Ejercicio 2

Hállese una parábola de tipo $y=x^2+bx+c$, *que sea tangente a la curva* $y=(x-1)^3$, *en el punto* $x=1$.

2. GENERALIZACION DE LOS CONCEPTOS DE TANGENCIA Y DE APROXIMACION

Se advierte fácilmente que la condición

$$2' \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-g(a+h)}{h^n}=0, \qquad n\geqslant 1$$

implica la condición 2. Así, pues, podemos ampliar y graduar el concepto de tangencia, considerando como aproximaciones de orden n los pares de funciones que cumplan las condiciones 1 y 2'.

Con esta ampliación del concepto, las tangencias consideradas en los ejercicios anteriores son de orden 1 y se refieren a *aproximaciones lineales,* correspondiendo al concepto intuitivo de tangencia recta-curva.

En esta línea, podría decirse que dos curvas que se cortan tienen un «contacto de orden 0».

Ejercicio 3

Compruébese que las funciones $y=x^3$ *e* $y=0$ *son tangentes en* $x=0$, *con una aproximación o contacto de orden 2.*

Las condiciones de tangencia vistas hasta ahora pueden tomar otra forma más operativa. En efecto, se demuestra que:

> Dos funciones f y g, n veces diferenciables en el punto a, presentan una tangencia de orden n en el punto a, si
>
> $$f(a)=g(a);\ f'(a)=g'(a);\ f''(a)=g''(a);\ \ldots;\ f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a) \qquad [2]$$

3. CURVAS OSCULATRICES. RADIO DE CURVATURA

Consideremos la curva de ecuación $y=f(x)$. Si se quiere aproximar esa función en el punto a, mediante una curva de una determinada forma (circunferencias, parábolas, etc.), habrá una de esa familia de curvas que haga óptima la aproximación, es decir, de mayor orden. Pues bien, esta curva se denomina *curva osculatriz* de $y=f(x)$ en el punto a.

Ejemplo 3

La parábola $y=x^2$ es la de la figura 4.1. Procedemos a comprobar que la circunferencia $x^2+y^2-y=0$ presenta tangencia de orden 2 con esa parábola en el punto $x=0$.

Se trata de la *circunferencia osculatriz* de la parábola en $x=0$, y el radio de esa circunferencia se define como el *radio de curvatura* de la parábola en el punto.

Según las condiciones [2], se tiene:

Parábola:

$$\text{En } x=0 \implies \begin{array}{ll} y'=2x; & y''=2 \\ y'(0)=0; & y''(0)=2 \end{array}$$

Circunferencia:

$$\text{En } x=0 \implies \begin{array}{ll} 2x+2yy'-1y'=0; & 2+2(y'^2+yy'')-y''=0 \\ y'(0,0)=0 & y''(0,0)=2 \end{array}$$

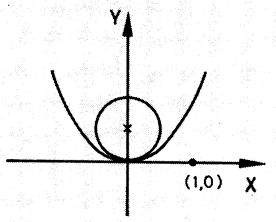


FIG. 4.1.

Ejercicio 4

Compruébese la condición 2' en el ejemplo 3, para un contacto de orden 2.

Ejercicio 5

Hállese una parábola de tipo $y=ax^2+bx+c$ *que tenga tangencia de orden 2 con la curva* $y=x^4-x^3$ *en el punto* $x=1$.

Ejemplo 4

Se pretende hallar la fórmula general para el cálculo del radio de curvatura de una función f dos veces diferenciable.

La ecuación general de una circunferencia que pase por un punto (x, y) es

$$(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2=r^2 \qquad [3]$$

Por otra parte, para que sea osculatriz en (x, y) a la función f ha de cumplir $y'=f'$, $y''=f''$. Por derivación implícita dos veces se obtiene

$$2(x-\alpha)+2(y-\beta)y'=0$$
$$2+2(y')^2+2(y-\beta)y''=0$$

Al simplificar por dos y sustituir y', y'' por su valor, se tiene el sistema en α y β:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)f'=0$$
$$1+(f')^2+(y-\beta)f''=0$$

del cual se deduce

$$\alpha=x-\frac{f'+(f')^3}{f''}$$
$$\beta=y+\frac{1+(f')^2}{f''}$$

y sustituyendo en la [3]

$$r=\left|\frac{\sqrt{[1+(f')^2]^3}}{f''}\right|$$

Ejercicio 6

Hallar los puntos de la parábola $y-x^2$ en los que el radio de curvatura es 1.

4. DIFERENCIAL EN UN PUNTO

Se recordará de cursos anteriores que el cuerpo de los números reales R se puede considerar como un espacio vectorial de dimensión 1, sobre el propio R.

Si f es una aplicación lineal de R en R, cumple, por definición,

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & f(a+b)=f(a)+f(b) \\ 2) & f(a\cdot b)=a\cdot f(b) \end{array}\right\} \quad \forall\, a, b \in R$$

De otra parte, como $f(a)=f(a\cdot 1)=a\cdot f(1)$, bastará conocer la imagen $K=f(1)$ para poder calcular la imagen de cualquier otro elemento a: habrá que multiplicarlo por K. Es decir, toda aplicación lineal f de R en R es una homotecia de razón $K=f(1)$,

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{+} & R \\ 1 & \longrightarrow & K=f(1) \\ a & \longrightarrow & a\cdot K=f(a) \end{array}$$

Este hecho permite identificar y también —lamentablemente— confundir la función lineal con este número, que es la razón de homotecia.

Hasta el presente se ha tratado la derivada $f'(a)$ de una función f en un punto a, como un número. Si se considera, en cambio, la función lineal homotecia de razón dicho número, se tiene la diferencial en un punto. Es esta noción, y no la de número, la que podrá generalizarse en el estudio de funciones de varias variables.

> La diferencial en un punto a de una función f, derivable en a, es la aplicación lineal:
>
> $$t \longrightarrow f'(a) \cdot t$$

La diferencial de $y = x^3 - x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1/2$ es la homotecia $y = -5/4\,x$, ya que $y'(1/2) = (3x^2 - 2x - 1)\,(1/2) = -5/4$. En la figura 4.2 están representadas ambas funciones.

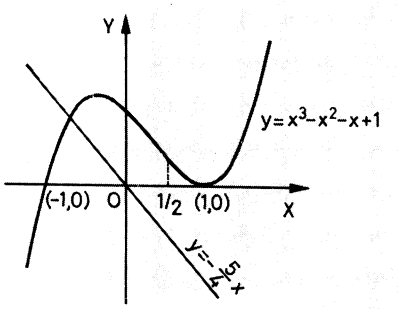


FIG. 4.2.

Ejercicio 7

Dénse las diferenciales de las funciones siguientes:

1) $y = x$ *en los puntos* $x = 2$ *y* $x = 3$.
2) $y = \operatorname{sen}^2 x$ *en los puntos* $x = \pi/4$ *y* $x = \pi$.
3) $y = e^{-2x}$ *en los puntos* $x = 1$ *y* $x = 1/2$.

5. DIVERSAS NOTACIONES DE LA DIFERENCIAL EN UN PUNTO a

La notación clásica para la función diferencial en un punto a es

$$dy = f'(a)\,dx$$

que se lee: «diferencial de y es igual a la derivada de f en a por diferencial de x».

Las líneas que siguen pretenden justificar esta notación y dar soltura en su manejo, por su utilización constante, tanto en Matemáticas como en otras ciencias.

Sean las funciones

$$y = f(x)$$
$$y_1 = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$

que son tangentes en el punto $(a, f(a))$, según muestra la figura 4.3.

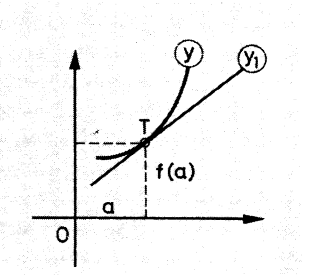


FIG. 4.3.

Si se pretende una traslación de ejes hasta llevar el origen al punto de tangencia, $T(a, f(a))$, habrá de usarse una traslación de vector $\boldsymbol{v}(-a, -f(a))$.

Para indicar las nuevas coordenadas, en lugar de usar x' e y', utilizaremos los símbolos Δx y Δy, que se leen «incremento de x» e «incremento de y», respectivamente. Así, las ecuaciones de la traslación son:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - a \\ \Delta y &= y - f(a) \end{aligned} \qquad [4]$$

Despejando las coordenadas originales

$$\begin{aligned} x &= \Delta x + a \\ y &= \Delta y + f(a) \end{aligned} \qquad [5]$$

Las fórmulas [4] y la figura 4.4 dan la razón de la nomenclatura: incremento de x hace referencia a la variación del punto x respecto al punto a, mientras que Δy hace lo propio respecto a $f(a)$.

Con el cambio, la función de la curva y se transforma en

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

y la función representada por la recta tangente, y_1, se convierte en

$$\Delta y_1 = f'(a)\,\Delta x \qquad [6]$$

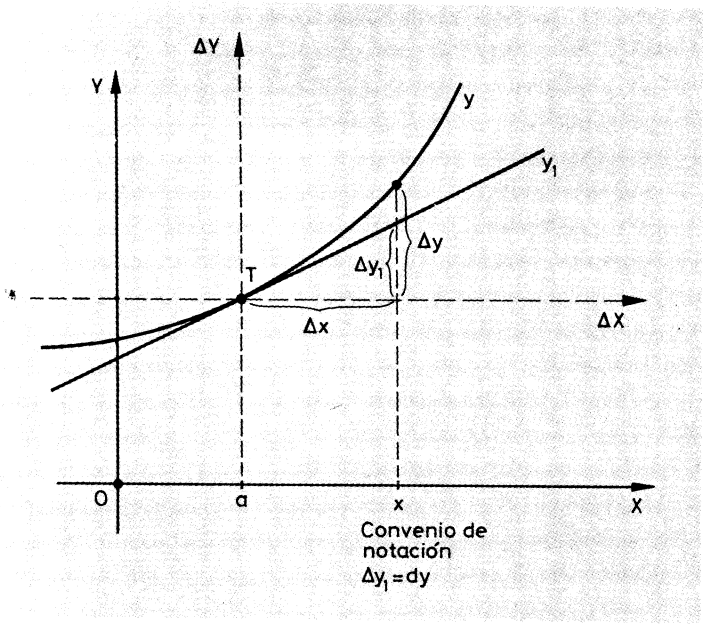


FIG. 4.4.

Observemos aquí que

> La función representada por la recta tangente en a coincide con la diferencial de la función y en el punto, cuando el origen de coordenadas es el punto de contacto.

No es extraño, por tanto, designar Δy_1 con el símbolo dy.

Por otra parte, como para la función $f(x)=x$ resulta que la diferencial en cualquier punto (véase el ejercicio 7) es $dx=1\cdot\Delta x$, se llega a la expresión con que se inició este apartado; sustituyendo en [6]:

$$dy=f'(a)\,dx$$

Ejercicio 8

Las tres expresiones siguientes son de frecuente uso. Razónese su significado.

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a=f'(a).$

2) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_a=f'(a).$

3) *Si y es función de v, y v es función de x*

$$\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

El interés científico de considerar la diferencial en un punto procede de que el siguiente límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x}{\Delta x}$$

es cero debido a la tangencia de las funciones y, y_1. Es decir, para incrementos «pequeños» de la variable independiente la diferencia de incrementos sobre la función y sobre la diferencial aún es de orden inferior. Por tanto, si un científico logra medir con precisión un par de fenómenos relacionados y conoce la «velocidad» de cambio de uno al variar el otro, en aquel punto, puede extrapolar sus resultados para variaciones pequeñas mediante la ley diferencial (¡es una simple homotecia!) sin incurrir en demasiado error.

Ejemplo 4

La ley que relaciona dos fenómenos es $y = x^3$. Calculamos $\Delta y - dy$ en el punto 3 para los incrementos 0,1 y 0,01 de la variable independiente.

Para $\Delta x = 0{,}1$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y = (3+0{,}1)^3 - 3^3 = 2{,}791 \\ dy = (3x^2)(3) \cdot 0{,}1 = 2{,}7 \end{array}\right\} \Delta y - dy = 0{,}091$$

Para $\Delta x = 0{,}01$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y = (3{,}01)^3 - 3^3 = 0{,}270901 \\ dy = 27 \cdot 0{,}01 = 0{,}27 \end{array}\right\} \Delta y - \Delta y = 0{,}000901$$

Ejercicio 9

Calcular el error cometido al sustituir Δy por dy de la función $y = x^2 - 2x$ en el punto $x = 2$, para los incrementos: 1) $\Delta x = 0{,}1$, 2) $\Delta x = 0{,}001$.

6. FUNCION DIFERENCIAL

Si una función f es derivable en todos los puntos de un intervalo (a, b), se consideraba el curso pasado la función derivada f' como la función que asignaba a cada punto x la derivada en el punto $f'(x)$.

Paralelamente, se podrá hablar de *función diferencial* df (o bien dy) *definida en* $(a, b) \in R$, que a cada punto $x \in (a, b)$ hace corresponder *la diferencial en el punto* x, es decir, la aplicación lineal

$$t \to f'(x) \cdot t$$

Ejemplo 7

La función diferencial de $y = \operatorname{sen} x$ está definida en R, ya que la función es derivable en todo R. Como la función derivada es $y' = \cos x$, la diferencial es, para cada $x \in R$,

$$t \longrightarrow (\cos x) \cdot t$$

o en notación clásica

$$dy = \cos x \, dx$$

Ejercicio 10

Hállese la función diferencial de las funciones

1) $\ln x^3 = y$;
2) $\sqrt{1 - x^2} = y$;
3) $e^{\operatorname{sen} x} = y$.

En la página 273 se puede consultar la diferencial de las principales funciones. La expresión precedida por el símbolo $\int$ es la diferencial de la función del otro miembro de la igualdad.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.1

1. $f'(1) = 3 = g'(1)$.
Como $f(a) = g(a)$, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - g(a-h)}{h} = 0,$$

se deduce que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a) - g(a+h)}{h} = 0 =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$= f'(a) - g'(a) \implies f'(a) = g'(a) \quad \text{y, recíprocamente.}$$

2. $y = (x-1)^2$.

3. $\lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^3 - 0}{h^2} = \lim_{h \to 0} h = 0$.

4. Si se intenta comprobar la condición 2', al despejar la y en la ecuación implícita de la circunferencia habrá que tomar la rama negativa en la que está el punto de contacto:

$$y=\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}$$

Entonces, en el punto $0+h=h$ se tiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-g(h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-4h^2}}{2}-h^2}{h^2}$$

Para el cálculo de este límite es conveniente hacer un cambio de variable, método que utilizaremos con frecuencia en integración.

Pongamos $2h=\operatorname{sen}\alpha$ (cambio posible por ser h tan pequeño como se quiera).

Al tender h a cero, también α tiende a cero y la expresión anterior se convierte en

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\dfrac{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{2}-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{4}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{4}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2-2\cos\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2-2\cos\alpha-1+\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{(\cos\alpha-1)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=$$

$$=-\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha-1}{1+\cos\alpha}=0$$

5. $y=3x^2-5x+2$.

6. $x=\pm\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}}{2}$.

7. 1) En $x=2$ y en $x=3$, $t\to t$.

2) En $x=\dfrac{\pi}{4}$, $t\to t$; en $x=\pi$, $t\to 0$.

3) En $x=1$, $t\to\dfrac{-2}{e^2}t$; en $x=\dfrac{1}{2}$, $t\to\dfrac{-2}{e}t$.

8. 1) Según las convenciones admitidas, $\Delta x=x-a$, por lo que

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=f(x)-f(a)\quad\text{y}\quad\Delta x\to 0\iff x\to a$$

En conclusión

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

2) $dy = f'(a)\,dx$, en notación clásica, de modo que la razón $\dfrac{dy}{dx}$ en a, es $f'(a)$.

3) Si $y = g(v)$ y $v = f(x)$, la derivada de la función compuesta $g \circ f$ es $g'[f(a)] \cdot f'(a)$, y en la imprecisa notación clásica,

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)_{f(a)} = g'[f(a)] \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_a = f'(a) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_a = (g \circ f)'(a)$$

9. Para $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}21$, $dy = 0{,}20$.
Para $\Delta x = 0{,}001$, $\Delta y = 0{,}002001$, $dy = 0{,}002$.

10. 1) $x \longrightarrow$ homotecia de razón $\dfrac{3}{x}$, o bien

$$dy = \frac{3}{x}\,dx.$$

2) $x \longrightarrow$ homotecia de razón $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, o bien

$$dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $x \longrightarrow$ homotecia de razón $\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$, o bien

$$dy = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\,dx.$$

4.2

Estudio local de funciones. Gráficas

1. DERIVACION Y CONTINUIDAD

Para que una función f pueda derivarse en un punto a es necesario que sea continua en a; pero no basta su continuidad en a para que sea derivable en ese punto.

Teorema:

> Si una función f es derivable en un punto a, es continua en ese punto a.

La proposición recíproca no es cierta.

La demostración del teorema es elemental, advirtiendo que $\lim_{x \to a} f(a) = f(a)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) =$$

$$= f'(a) \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Entonces, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, lo que prueba el teorema.

La figura 4.5 presenta cuatro funciones continuas en los puntos que se indican y, sin embargo, sólo dos son derivables en esos puntos.

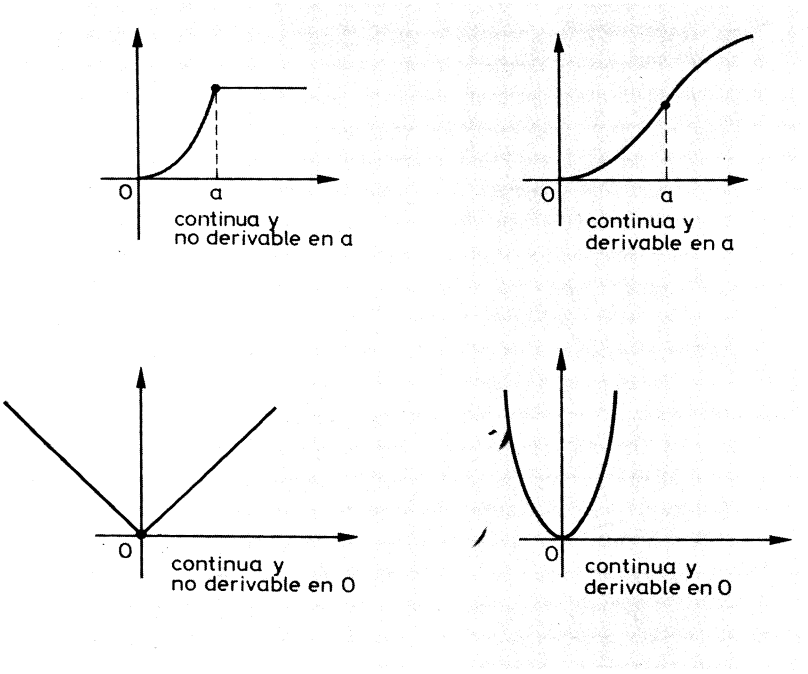


FIG. 4.5.

2. DERIVADA EN UN PUNTO Y MONOTONIA. EXTREMOS LOCALES

El análisis de la monotonía de la función representada en la figura 4.6 arroja los siguientes resultados:

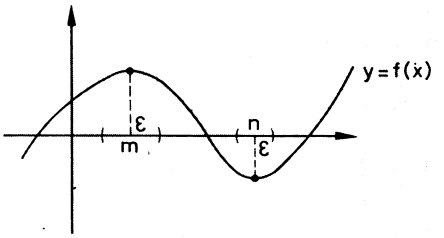


FIG. 4.6.

Intervalo		*Monotonía*
$\forall x \in (-\infty, m)$,	$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,	f es creciente
$\forall x \in (m, n)$,	$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$,	f es decreciente
$\forall x \in (n, +\infty)$,	$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,	f es creciente

Los puntos m y n son algo singulares, ya que en ellos f no es creciente ni decreciente. El punto m tiene un entorno $A(m)=(m-\epsilon, m+\epsilon)$ en el que la función no toma valores superiores a $f(m)$.

$$\left.\begin{array}{l} m \text{ es máximo local} \\ \text{de la función } f \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \exists A(m)/\forall x \in A(m),\ f(x) \leqslant f(m)$$

Se dice que $f(m)$ es el valor máximo de f en el entorno A.

De modo parecido, el punto n tiene un entorno $B(n)=(n-\epsilon, n+\epsilon)$ en el que la función no toma valores inferiores a $f(n)$.

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ es mínimo local} \\ \text{de la función } f \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \exists B(n)/\forall x \in B(n),\ f(x) \geqslant f(n)$$

El número $f(n)$ es el valor mínimo de f en el entorno B.

Ambos tipos de puntos reciben el nombre común de *extremos locales*.

Si se tiene en cuenta que una función constante es simultáneamente creciente y decreciente, se puede afirmar que los extremos locales separan intervalos de distinta monotonía. En un máximo la función pasa de creciente a decreciente; inversamente en un mínimo.

Otra propiedad que tienen los extremos locales, pero que tampoco es privativa de estos puntos, es que las tangentes a la función en ellos —cuando existen— son paralelas al eje de abscisas. En (*b*) de la figura 4.7 puede observarse un punto i en el que la tangente es paralela a OX y, sin embargo, no es extremo local.

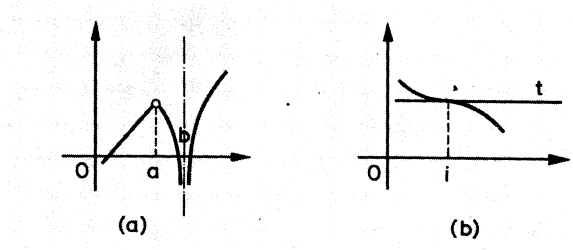


FIG. 4.7.

Para descubrir si una funcion f es creciente o decreciente en a, basta conocer el signo de $f'(a)$ en el supuesto que exista y no sea nula. En efecto, en un entorno de a, el signo de

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

coincide con el de $f'(a)$. Así, en un entorno de a, sucede que:

$$\text{I.}\quad f'(a)>0 \Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>a \Longrightarrow f(x)>f(a) \\ x<a \Longrightarrow f(x)<f(a) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f \text{ es creciente en } a \text{ estrictamente}$$

II. $f'(a)<0 \Longrightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>a \Longrightarrow f(x)<f(a) \\ x<a \Longrightarrow f(x)>f(a) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f \text{ es decreciente en } a \text{ estrictamente}$$

Resumamos:

$f'(a)>0 \Longrightarrow f$ es creciente en a
$f'(a)<0 \Longrightarrow f$ es decreciente en a

Ejercicio 11

Dígase qué monotonía presenta la función $y=x^3-3x^2+1$ *en los puntos* $x=-1$; $x=0$; $x=1$; $x=2$; $x=3$.

¿Cómo se comporta la derivada primera en los extremos locales?

1. Si f es derivable en m, existe el límite

$$\lim_{x\to m}\frac{f(x)-f(m)}{x-m}=f'(m).$$

2. Si m es un máximo local, f no es estrictamente creciente ni decreciente en m y, por tanto, $f'(m)\not>0$ y $f'(m)\not<0$. Entonces, $f'(m)=0$, puesto que existe.
Análogamente, para un mínimo n, como

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)-f(n)}{x-n}=f'(n),$$

existe y no puede ser ni $f'(n)>0$, ni $f'(n)<0$, ha de ser $f'(n)=0$.

Concluyamos:

Para que una función derivable en a tenga un extremo local máximo o mínimo en ese punto a es necesario que $f'(a)=0$.

La condición recuadrada es necesaria, pero no es suficiente para que haya máximo o mínimo. Así lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8

La figura 4.8 facilita la gráfica de la función $y=x^3$. Claramente se ve que en $x=0$ no existe ni máximo ni mínimo y, sin embargo,

$$y'=3x^2$$
$$y'(0)=0$$

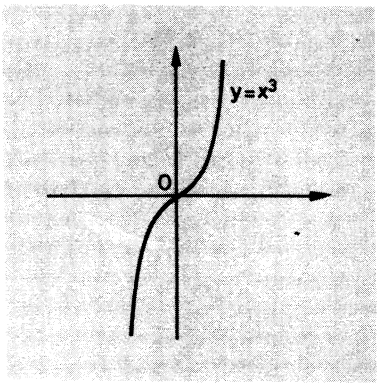


FIG. 4.8.

Ejercicio 12

Dígase en qué puntos puede tener máximos o mínimos la función $y=x^3-3x^2+1$.

Como condiciones suficientes para la existencia de máximo o mínimo local, puede escogerse una de estas tres:

Para que una función derivable en a tenga un extremo local máximo o mínimo en ese punto a, es suficiente una de estas tres condiciones, supuesto $f'(a)=0$:

1. La curva queda al mismo lado de la tangente

$$\forall x \in A(a),\ x \neq a,\ \begin{cases} f(x) \leqslant f(a) \implies \text{máximo} \\ f(x) \geqslant f(a) \implies \text{mínimo} \end{cases}$$

2. La función derivada cambia de signo en a

$$h>0,\ \begin{cases} f'(x-h) \geqslant 0 \geqslant f'(x+h) \implies \text{máximo} \\ f'(x-h) \leqslant 0 \leqslant f'(x+h) \implies \text{mínimo} \end{cases}$$

3. La segunda derivada en a no es nula

$$y''(a) \neq 0\ \begin{cases} y''(a)<0 \implies \text{máximo} \\ y''(a)>0 \implies \text{mínimo} \end{cases}$$

El último criterio, que vamos a razonar, tiene los inconvenientes de que no siempre existe la derivada segunda o puede ser difícil de calcular y además no decide, si da igual a cero.

La derivada segunda es, en particular, derivada de la derivada $y''=(y')'$; por tanto, si es distinta de cero en a indica que y' es monótona creciente o decreciente en a, y, como $y'(a)=0$, hay cambio de signo de la función derivada en a.

Ejemplo 9

La función $y=\frac{1}{6}(x^3-4x)$ es indefinidamente derivable en todo R. Su derivada $y'=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}$ se anula en los puntos $x=\frac{2}{\pm\sqrt{3}}$ (Fig. 4.9). La derivada segunda es $y''=x$, positiva en $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (mínimo) y negativa en $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (máximo). (Criterio 3.)

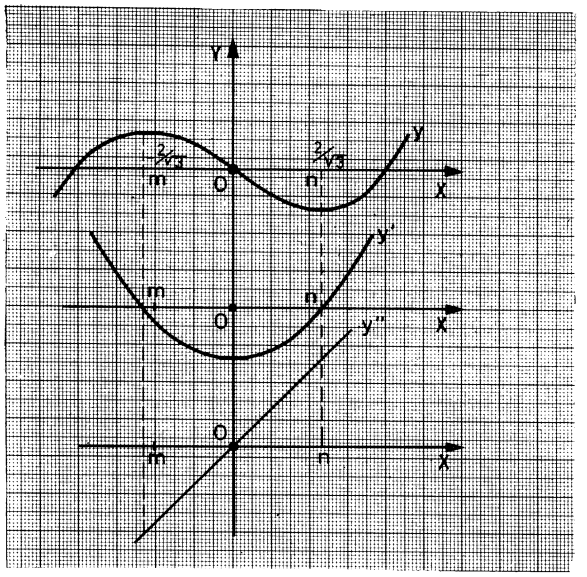


FIG. 4.9.

Si se estudia el signo de y' para un incremento h en el punto $\frac{2}{\sqrt{3}}$ se tiene:

$$y'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+h\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+h\right)^2-\frac{2}{3}=+\frac{2}{\sqrt{3}}h+\frac{h^2}{2}.$$

que cambia de signo simultáneamente con h. Es un mínimo. (Criterio 2.)

Ejercicio 13

Decídase ahora si los puntos encontrados en el ejercicio anterior son o no máximos o mínimos locales de la función que allí se planteaba.

Ejercicio 14

Estúdiese por los criterios 2 y 3 el extremo de la función $y=\sqrt{1-x^2}$ *en el punto* $x=0$.

Ejercicio 15

Hállense los extremos de las funciones

$$1)\quad y=\sec 4x \text{ en } [0, 2\pi); \qquad 2)\quad y=x^3+x^2-x-1.$$

Tomando para la suficiencia el tercer criterio de los expuestos, se puede escribir, resumiendo:

> Es condición suficiente para que una función derivable en a presente un extremo local en ese punto
>
> $$y'(a)=0 \wedge \begin{cases} y''(a)<0 \implies \text{máximo en } a \\ y''(a)>0 \implies \text{mínimo en } a \end{cases}$$

Ejercicio 16

Determinar los intervalos de crecimiento y los extremos locales de las funciones

$$1)\quad y=\operatorname{sen}^2 x; \qquad 2)\quad y=1/x; \qquad 3)\quad y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

3. TEOREMA DE ROLLE

Si un conductor va y vuelve a un mismo punto por una carretera, su velocidad de alejamiento ha sido nula en algún instante.

Esta proposición tan clara es la traducción del teorema que nos ocupa, en términos de movimiento. La velocidad instantánea es la derivada del espacio en función del tiempo. Esta función debe ser derivable, para que tenga sentido el concepto de velocidad, es decir, se admiten variaciones de la misma, pero sin cambios bruscos —choques, empujones, etc.—. En este caso, para regresar a un punto por el mismo camino, evidentemente hay que parar.

La demostración intuitiva también es sencilla: habrá un punto en el que se alcanzará la máxima lejanía (si no está parado todo el tiempo). En él deja el conductor de alejarse, para empezar a acercarse. La velocidad de alejamiento será nula.

> Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), tal que $f(a)=f(b)$, hay algún punto $c \in (a, b)$ en el que $f'(c)=0$.

En efecto, si $f(a)=f(b)=f(x)$ para todo $x \in (a, b)$, la función es constante en el intervalo y la derivada es nula en el mismo. Si f no es constante, tiene un máximo o un mínimo * en un punto c de (a, b). Según el apartado anterior la derivada en c será nula (Fig. 4.10, A).

* Se trata de un teorema sobre funciones continuas en un intervalo cerrado. Su demostración no es trivial y nos apartaría del tema. Se apoya en que el cuerpo de los números reales es completo.

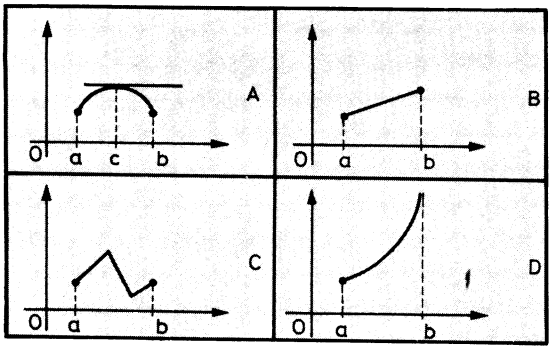


FIG. 4.10.

Ejercicio 17

En los apartados B, C y D de la figura 4.10 *se representan tres funciones que no cumplen el teorema por fallar alguna hipótesis. Indíquese.*

Ejercicio 18

Se lanza una piedra verticalmente y vuelve a caer en el suelo a los seis segundos. Represéntese la gráfica del movimiento en función del tiempo y hállese la altura en el instante de velocidad cero. (Considérese $g = 10$ m/seg^2.)

4. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

No es menos clara la afirmación de que un móvil que saca un determinado promedio de velocidad en un intervalo de tiempo ha llevado realmente esta velocidad en un momento dado.

> Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Existe un punto $c \in (a, b)$ tal que
>
> $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teniendo en cuenta que el cociente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, el *teorema de la media* afirma que hay un punto $c \in (a, b)$ en el que la tangente es paralela a la secante (Fig. 4.11).

La demostración es a la vez artificial y sencilla, con reducción al teorema anterior. En efecto, considérese la función:

$$g(x) = x(f(b) - f(a)) - f(x)\,(b - a)$$

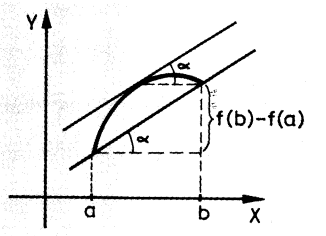


FIG. 4.11.

Es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $g(a)=g(b)=a\cdot f(b)-b\cdot f(a)$. Por tanto, existe un punto $c\in(a, b)$ en el que $g'(c)=0$. Ahora bien,

$$g'(c)=0=f(b)-f(a)-f'(c)\,(b-a)$$

que, despejando convenientemente, da el resultado pedido.

Ejercicio 19

La piedra del ejercicio anterior alcanza la altura máxima a los tres segundos. Hállese en qué momento lleva la velocidad promedio de su recorrido vertical.

5. TEOREMA DE CAUCHY Y REGLA DE L'HÔPITAL

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), existe un punto $c\in(a, b)$ en el que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Este teorema se reduce también artificiosamente al teorema de Rolle. No debe caerse en un error tentador: como f y g cumplen las hipótesis del teorema de la media, se puede escribir

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c_1)\qquad\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c_2)$$

El cociente de ambas expresiones semejaría el resultado pedido, pero es evidente que c_1 y c_2 no coinciden necesariamente.

En nuestra prueba consideramos la función

$$h(x)=g(x)\,(f(b)-f(a))-f(x)\,(g(b)-g(a))$$

Es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a)=h(b)=g(a)f(b)-f(a)g(b)$. Habrá un punto $c\in(a, b)$ en el que $h'(c)=0$. Ahora bien,

$$h'(c)=0=g'(c)\,(f(b)-f(a))-f'(c)\,(g(b)-g(a))\qquad[6]$$

Basta despejar convenientemente para obtener la expresión requerida. (Se supone $g(b)-g(a)\neq 0$. De lo contrario, habría que invertir los cocientes o dejar la expresión [6].)

El teorema de la media es un caso particular de éste para $g(x)=x$.

El teorema de Cauchy ofrece una demostración sencilla de la regla de l'Hôpital, utilísima en el cálculo de límites funcionales de tipo 0/0. Esta regla afirma que:

> Si $\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$, en donde f y g son derivables en un entorno de a y existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, este límite coincide con $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ejemplo 10

El límite de $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ cuando $x\to 0$ es de tipo 0/0. Derivando separadamente (!) numerador y denominador se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{1}=1$$

que será el límite pedido.

Del mismo modo, aplicando dos veces la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Justifiquemos la regla de l'Hôpital:

Como $f(a)=g(a)=0$, se puede escribir, por el teorema de Cauchy,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a} f'(c)/g'(c)$$

en donde $c\in(x,a)$ y, al tender x hacia a, también c tiende hacia a. Sustituyendo la c variable por x, se tiene el resultado.

Ejercicio 20

Calcúlense los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^3}$;

2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$;

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$;

4) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$.

La regla de l'Hôpital se aplica también a indeterminaciones de tipo ∞/∞ y a otras formas de indeterminación que se reducen a las anteriores con algunas transformaciones, como muestran los ejemplos siguientes:

Ejemplo 11

El límite de $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$, cuando $x\to 1$, es de la forma $\infty-\infty$. Si se reduce a común denominador se tiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\quad\text{de tipo } 0/0.$$

Aplicamos dos veces la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\dfrac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\dfrac{1}{x}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\dfrac{1}{x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 12

El límite de x^x cuando x tiende a cero es de la forma 0^0. Al tomar logaritmos se convierte en un límite de la forma $0\cdot\infty$: $\lim_{x\to 0} x\ln x$. Se transforma en ∞/∞ con el cambio $x\ln x=\dfrac{\ln x}{1/x}$. Por l'Hôpital da límite 0, y su antilogaritmo será 1, que es el límite buscado.

Ejercicio 21

Hállense los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

2) $\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$;

3) $\lim_{x\to\infty} x^{(1/x)}$;

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\cos 3x-\cos 5x}$.

6. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. INFLEXIONES

Obsérvese la gráfica de la función $y=f(x)$, dibujada en la figura 4.12. En ella aparece simbolizado un vector libre $\boldsymbol{v}$, de módulo arbitrario, pero de dirección y sentido los del semieje positivo de ordenadas.

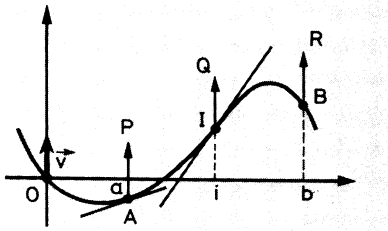


FIG. 4.12.

Se dice que la función es *cóncava* en $A(a, f(a))$, porque en un cierto entorno de a la curva está en el mismo semiplano que $\overrightarrow{AP} \in \boldsymbol{v}$, respecto de la tangente en A.

Análogamente, la función se dice *convexa* en $B(b, f(b))$, porque en un cierto entorno de b la curva está en distinto semiplano que $\overrightarrow{BR} \in \boldsymbol{v}$, respecto de la tangente en B.

Los puntos, como el I, en los que la curva pasa de ser cóncava a convexa (o viceversa), la tangente atraviesa a la curva, y se llaman puntos de *inflexión*.

¿Cómo se puede saber, usando el cálculo diferencial, la concavidad o convexidad de una función en un punto?

Los criterios que a continuación se recuadran se demostrarán cumplidamente en cursos superiores, cuando se disponga del desarrollo de Taylor.

La función $y=f(x)$ indefinidamente derivable en a, es

$$\left.\begin{array}{l}\text{cóncava en } a\\ \text{convexa en } a\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{la primera derivada que no se}\\ \text{anula, a partir de la de segundo}\\ \text{orden, es de orden } par\end{array}\right\} \text{ y } \left\{\begin{array}{l} f^{(2k)}(a)>0\\ \\ f^{(2k)}(a)<0\end{array}\right.$$

La función $y=f(x)$, indefinidamente derivable en a, tiene un

$$\text{punto de } inflexión \text{ en } a \Longleftrightarrow f''(a)=0 \wedge f^{(2k+1)}(a)\neq 0 \left\{\begin{array}{l}\text{la primera deriva-}\\ \text{da que no se anula}\\ \text{a partir de la de}\\ \text{segundo orden es}\\ \text{de orden impar.}\end{array}\right.$$

La figura 4.13 recoge gráficamente los casos tratados en los criterios recuadrados.

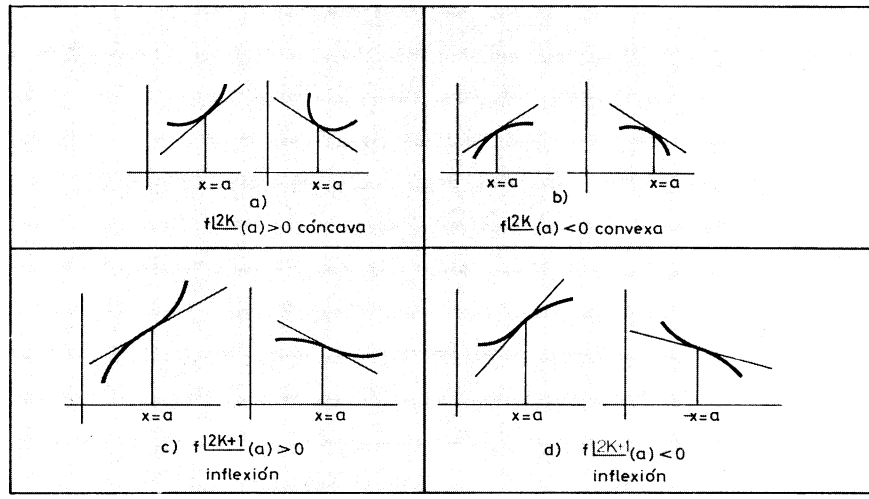


FIG. 4.13.

Ejemplo 1.

La función $y=x^3-3x^2+1$, cuya gráfica se dibuja en la figura 4.14,

a) es convexa en $x=-1$, en $x=0$ y en $x=1/2$, entre otros puntos. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} y'=3x^2-6x \\ y''=6x-6 \\ y'''=6 \\ y''(-1)=-12<0 \\ y''(0)=-6<0 \\ y''(1/2)=-3<0 \end{array}\right\} \text{convexa}$$

b) es cóncava en $x=3/2$; en $x=2$ y en $x=3$, entre otros puntos, porque

$$\left.\begin{array}{l} y''(3/2)=+3>0 \\ y''(2)=+6>0 \\ y''(3)=+12>0 \end{array}\right\} \text{convexa}$$

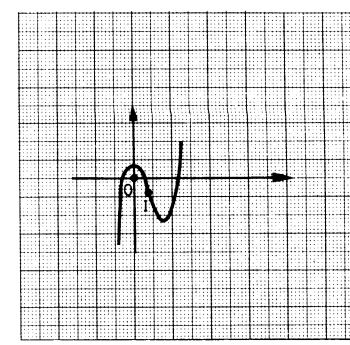


FIG. 4.14.

c) presenta una inflexión en $x=1$. Efectivamente,

$$\begin{cases} 1. & f''(1)=0 \\ 2. & f'''(1)=6\neq 0 \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad de la función dada son

en $(-\infty, 1)$, convexa
en $(1, +\infty)$, cóncava

Ejercicio 22

Determínese la concavidad o convexidad de las funciones siguientes, en $x=\pi$

a) $y=\operatorname{sen} x$; *b)* $y=\operatorname{tg} x$; *c)* $y=\cos x$; *d)* $y=e^x$; *e)* $y=2^x$.

Ejercicio 23

Hállense los puntos de inflexión de la función $y=x^4-2x^2+1$.

Ejercicio 24

Calcúlense los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones

a) $y=\ln x$; *b)* $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; *c)* $y=x^5$.

7. ESTUDIO DE LA GRAFICA DE UNA FUNCION

Para el estudio de la gráfica de una función conviene seguir un orden en los cálculos, que puede ser el que se indica:

Estúdiese la gráfica de la función $y=f(x)=\dfrac{4x^2-9}{4x^2-1}$.

1. *Dominio de definición y puntos de discontinuidad*

Descompuestos en factores sus términos, resulta:

$$y=\frac{(2x+3)(2x-3)}{(2x+1)(2x-1)}$$

Los puntos $x=-1/2$ y $x=1/2$ anulan el denominador, lo que indica que

en esos puntos no existe la función. Así, pues, los puntos de discontinuidad son $x = \pm 1/2$, y su dominio de definición es

$$D = (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$$

2. *Puntos de intersección con los ejes*

$$\text{para } x = 0 \implies y = 9; \quad A(0, 9)$$

$$\text{para } y = 0 \implies 4x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 3/2 \begin{cases} P(3/2, 0) \\ Q(-3/2, 0) \end{cases}$$

3. *Simetrías respecto de los ejes y origen*

Como

$$f(x) = f(-x) \implies \text{la función es simétrica, respecto del eje } OY$$

$$f(x) \neq -f(-x) \implies \text{la función no es simétrica, respecto del origen.}$$

4. *Determinación de asíntotas*

Las asíntotas o «tangentes en el infinito» son de dos tipos:

A) *paralelas a los ejes de coordenadas*

$$x = k, \text{ siendo } \lim_{x \to k} y = \pm\infty; \qquad y = q, \text{ siendo } \lim_{x \to \infty} y = q$$

En nuestro ejemplo,

$$\lim_{x \to \pm 1/2} y = \pm\infty \implies \begin{cases} x = -1/2; & \lim_{x \to \infty} y = 1 \implies y = 1 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

B) *oblicuas*

Se trata de rectas $y = mx + b$, en las que

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}; \qquad b = \lim_{x \to \infty} (y - mx)$$

La función del ejemplo que venimos desarrollando no tiene asíntotas oblicuas. En el ejemplo 15 puede consultarse su cálculo.

Hasta ahora llevamos conseguido lo que muestra la figura 4.15.

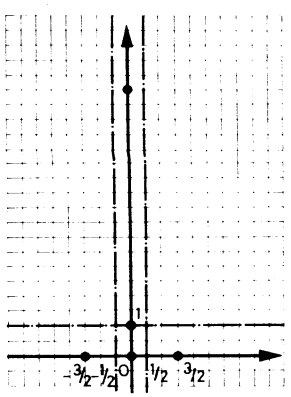


FIG. 4.15.

5. *Monotonía: intervalos de crecimiento y decrecimiento*

$$y' = \frac{8x(4x^2-1) - 8x(4x^2-9)}{(4x^2-1)^2} = \frac{64x}{(4x^2-1)^2}$$

Siendo el denominador siempre positivo en el dominio, y' tomará el signo que tome el numerador; de manera que, para puntos del dominio,

$x<0 \implies y'<0$: $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, -1/2) \cup (-1/2, 0)$

$x>0 \implies y'>0$: $f(x)$ es *creciente* en $(0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$

6. *Extremos locales*

$$y' = \frac{64x}{(4x^2-1)^2}; \quad y' = 0 \iff \frac{64x}{(4x^2-1)^2} = 0 \iff 64x = 0 \iff x = 0$$

$$y'' = -\frac{64(20x^2+1)}{(4x^2-1)^3}; \quad y''(0) > 0.$$

La función de nuestro ejemplo presenta un mínimo en $x=0$.

Sustituyendo en $f(x)$, se obtiene el mínimo local $A(0, 9)$, punto que había aparecido calculado ya en **2**.

7. *Concavidad y convexidad. Inflexiones*

$$y'' = 0 \implies 20x^2 + 1 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones en R y, por tanto, la función estudiada no tiene puntos de inflexión.

$$\left.\begin{array}{ll} \forall\, a \in (-\infty, -1/2), & y''(a)<0 \\ \forall\, a \in (-1/2, 1/2), & y''(a)>0 \\ \forall\, a \in (1/2, +\infty), & y''(a)<0 \end{array}\right\} \implies f(x) \text{ es convexa en } D-(-1/2, 1/2).$$

El ejemplo 16 y el ejercicio 26 darán ocasión de buscar y hallar puntos de inflexión.

El análisis realizado en los siete puntos anteriores es suficiente para dibujar la gráfica, que es la que aparece en la figura 4.16.

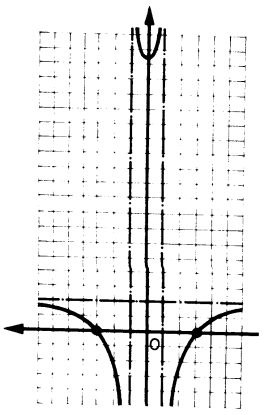


FIG. 4.16.

Ejemplo 15

Determínense las asíntotas de la función

$$y=\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

Paralelas a los ejes:

$$\lim_{x\to -1} y=\pm\infty \implies x=-1$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\infty;$$ no tiene asíntotas paralelas a OX.

Oblicuas:

$$\left.\begin{aligned} m&=\lim_{x\to\infty} y/x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)^2}=1\\ b&=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(1+x)^2}-x\right)=-2\end{aligned}\right\}\implies y=x-2$$

Ejercicio 25

Hállense las asíntotas oblicuas de $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$.

Ejemplo 16

Los puntos de inflexión de la función $y=x^4-2x^2+1$ son:

$$\left.\begin{aligned} &y'=4x^3-4x\\ &y''=12x^2-4;\ y''=0 \iff 12x^2-4=0 \implies x=\pm\sqrt{3}/3\\ &y'''=24x;\ y'''(\sqrt{3}/3)\neq 0;\ y'''(-\sqrt{3}/3)\neq 0\end{aligned}\right\}\implies$$

$$\implies I_1\left(\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right);\ I_2\left(-\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right)$$

Ejercicio 26

Hállense los puntos de inflexión de la función $y=4x^3-4x$.

8. OPTIMIZACION

El tener a punto los criterios para saber cuándo una función alcanza un máximo o un mínimo resulta muy útil para resolver problemas, en los que se busca «la mejor solución».

Supongamos que la función de la que se desea saber su máximo o su mínimo viene dada en dos variables

$$Z = \varphi(x, y)$$

y que el propio enunciado del problema facilita la función que liga x con y

$$y = f(x).$$

De modo general, se puede indicar el modo de proceder:

1. Establézcase la función cuyos máximos o mínimos se buscan.
2. Encuéntrese la función que ligue las variables del problema.
3. Sustitúyase 2) en 1), a fin de conseguir una función en una variable.
4. Hállense los extremos locales de la función, objeto del problema.

El carpintero económico. Se ha de construir el marco de una ventana rectangular de un metro cuadrado de área. El coste por metro de marco horizontal se estima en 160 pesetas, mientras que el metro de marco vertical vale a 250 pesetas. Diséñese el marco más económico (de menor coste).

1. Coste: $C = 2(160a + 250b)$.
2. $a \cdot b = 1$.
3. $b = 1/a \Longrightarrow C = 2\left(160a + \dfrac{250}{a}\right)$.
4. $C' = 2\left(160 - \dfrac{250}{a^2}\right) = 0$

$$160a^2 - 250 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1{,}25 \text{ m}$$

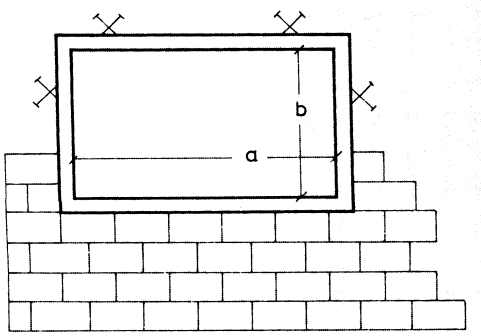


FIG. 4.17.

La solución 1,25 m es un mínimo de C, porque $C''(1,25)>0$. La solución negativa carece de sentido en el problema. Entonces, $b=0{,}8$ m.

Las dimensiones de la ventana más económica son 125 cm de ancha y 80 cm de alta.

Ejercicio 27

Los catetos de un triángulo rectángulo suman 20 *m. Hállese la hipotenusa del que tenga mayor área.*

Ejemplo 18

El fabricante ahorrador. En una chapistería se dispone de planchas de latón cuadradas que, con los cortes y dobleces oportunos, se pueden convertir en cajas sin tapadera (Fig. 4.18). ¿Qué dimensiones han de tener los cuadrados recortados para fabricar cajas de la máxima capacidad? ¿Cuál es esa capacidad?

1. Capacidad: $V=(40-2x)^2\cdot x$.
2. Como la función V ha resultado en una variable, calculemos su máximo.
3. $V'=1\,600+12x^2-320x$;

   $V'=0 \implies x_1=6{,}\widehat{6}$ cm; $x_2=20$ cm.

Claramente, la solución x_2 es un mínimo, y como

$$V''(6{,}\widehat{6})<0 \implies \text{capacidad máxima}$$
$$V_{\text{máx}} \simeq 4\,740 \text{ cm}^3$$

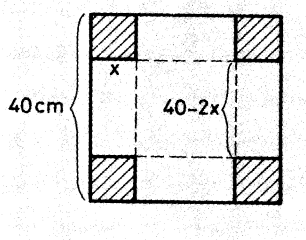


FIG. 4.18.

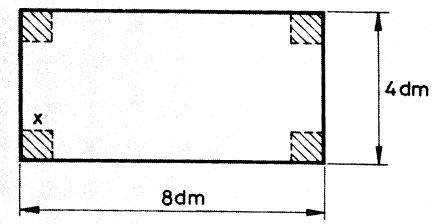


FIG. 4.19.

Ejercicio 28

Si las planchas de las que se dispone son las rectangulares que se dibujan en la figura 4.19, *hállense las dimensiones de las cajas de capacidad máxima.*

Ejemplo 19

El mayor cucurucho. Se dispone de un círculo de papel de 9 cm de radio. Enrollando un sector del mismo se puede hacer un cucurucho, como muestra la figura 4.20. Si el ángulo del sector es pequeño, resultará un embudo de trompeta; si es grande, un sombrero chino. ¿Qué ángulo debe tener el sector para que la capacidad del cucurucho sea máxima?

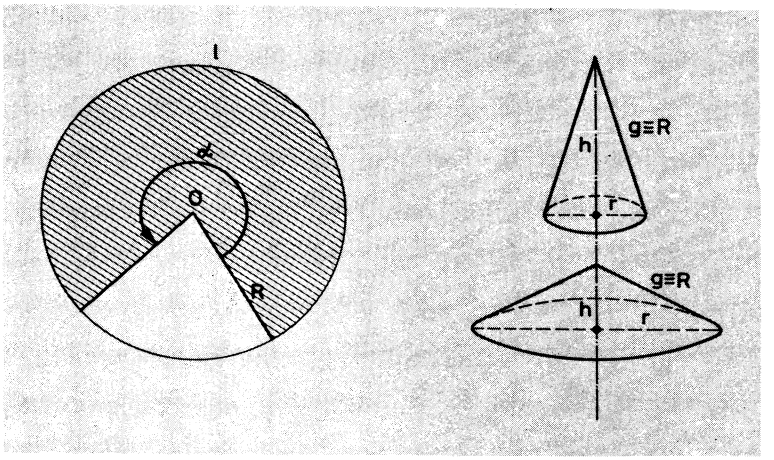


FIG. 4.20.

1. El cucurucho es un cono cuyo volumen viene dado por la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

2. Por el teorema de Pitágoras

$$r^2 = R^2 - h^2$$

3. Sustituyendo en el volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h = \frac{\pi R^2}{3}h - \frac{\pi}{3}h^3$$

4.

$$V' = \frac{\pi R^2}{3} - \pi h^2; \qquad V' = 0 \Longrightarrow h = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}R = \pm 3\sqrt{3}\ \text{cm}.$$

La solución negativa no lo es del problema y, como $V'' = -2\pi h$, $V''(3\sqrt{3}) < 0$, esa altura es la del volumen máximo, que es:

$$h = 3\sqrt{3}; \qquad r = \sqrt{R^2 - h^2} = 3\sqrt{6}\ \text{cm}$$

$$V_{\text{máx}} = \frac{\pi}{3} \cdot 54 \cdot 3\sqrt{3} = 54\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

Finalmente, para calcular la amplitud del sector a recortar, si α se pone

en radianes, la longitud del arco del sector es

$$l=\alpha\cdot R=2\pi r \implies \alpha=\frac{2\pi r}{R}\simeq 5 \text{ radianes}$$

Ejercicio 29

Hállense la altura y el radio de la base del cono de revolución de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de 9 *cm de radio.*

Ejercicio 30

Calcúlense las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de 10 *cm de radio.*

Ejemplo 20

El nadador sorprendido. Empieza a llover y... la ropa está en la playa. El nadador duda si ir nadando hacia su ropa o salir del agua cuanto antes y llegar a ella corriendo. Sabe que en tierra puede alcanzar los 20 km/h, mientras que nadando sólo logra los 5 km/h. En línea recta está a 500 m de sus vestidos, situados en O y a 300 m de la playa. ¿Cuál es el camino óptimo a seguir? (Fig. 4.21).

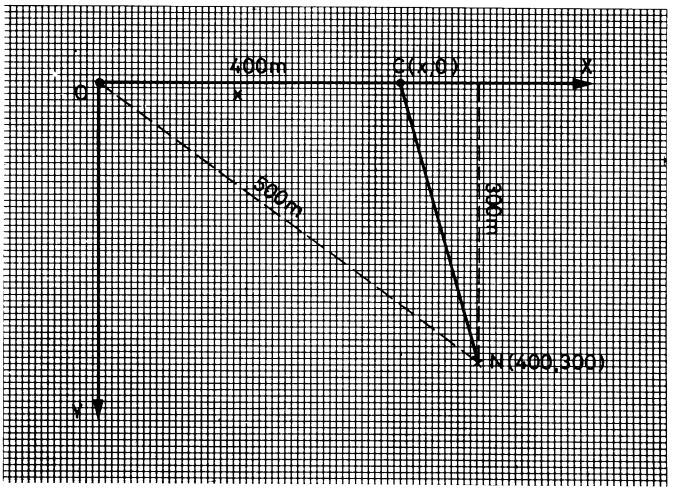


FIG. 4.21.

Supongamos que C es el punto de la playa a donde debe arribar para conseguir lo que pretende, que es llegar lo antes posible a O.

El tiempo invertido en el recorrido es

$$t=\frac{x}{v_2}+\frac{\sqrt{(x_0-x)^2+y_0^2}}{v_1}$$

Derivando respecto de la variable x,

$$t' = 1/v_2 + \frac{-(x_0 - x)}{v_1\sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2}}$$

$$t' = 0 \implies x = x_0 - \frac{v_1 \cdot y_0}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$$

Sustituyendo valores se obtiene aproximadamente para x un valor de 322,64 m.

Ejercicio 31

Se quiere comprar un solar rectangular de 200 m^2 *de superficie, pero interesa que la valla de cerca sea lo menos larga posible. Determínense las dimensiones del solar adecuado.*

Ejemplo 21

El juez equitativo. Se suele considerar que la cantidad o medida x que más se ajusta a diversas cantidades o medidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es la que hace mínima la suma

$$\Sigma = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$$

Tal procedimiento se llama «método de los mínimos cuadrados» y habrá ocasión en el curso de utilizarlo en la unidad 5, en su capítulo de *regresión lineal.*

Véase el acierto de un juez que reparte el promedio de los haberes de todos, a cada uno de los socios implicados en el litigio.

$$\Sigma' = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n)$$

Si se iguala a cero, se obtiene para x

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Es decir, el promedio es la cantidad que más se ajusta «cuadráticamente» a las cantidades iniciales.

Ejercicio 32

Al medir la tensión de una corriente eléctrica con cuatro voltímetros igualmente *fiables, se han obtenido las medidas* 0,49, 0,51, 0,53 *y* 0,54 *voltios. ¿Qué cantidad medida se ajusta mejor «cuadráticamente» a las medidas halladas?*

Ejercicio 33

El precio de un diamante se considera proporcional al cuadrado de su peso. Demuéstrese que partiendo un diamante en otros dos más pequeños, siempre disminuye su valor y dígase cuál es la partición con depreciación máxima.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.2

11. $y' = 3x^2 - 6x$; $y'(-1) > 0 \Longrightarrow$ creciente; $y'(0) = 0$ no decide; $y'(1) < 0 \Longrightarrow$ decreciente; $y'(2) = 0$ no decide; $y'(3) > 0 \Longrightarrow$ creciente.

12.

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Puede tener extremos locales en esos puntos, pero todavía no se puede asegurar.

13. $y'' = 6x - 6$;

$y''(0) < 0$. En $x = 0$ existe un máximo.

$y''(2) > 0$. En $x = 2$ existe un mínimo.

14.

$$y' = \frac{-x}{1 - x^2}; \qquad \left.\begin{matrix} y'(0-h) > 0 \\ y'(0+h) < 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{máximo en } x = 0.$$

De otra manera, $y''(0) < 0 \Longrightarrow$ máximo.

15.

1) $$y' = \frac{4 \operatorname{sen} 4x}{\cos^2 4x} = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} 4x = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & x_3 = \dfrac{\pi}{2} \\ x_2 = \pi/4 & x_4 = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \quad (\text{en } 0 \leqslant x < 2\pi);$$

$$y'' = \frac{16 \cos^3 4x + 32 \cos 4x \operatorname{sen}^2 4x}{\cos^4 4x};$$

$y''(0) > 0 \Longrightarrow 0$ es mínimo

$y''(\pi/4) < 0 \Longrightarrow \pi/4$ es máximo

$y''(\pi/2) > 0 \Longrightarrow \pi/2$ es mínimo

$y''(3\pi/4) < 0 \Longrightarrow 3\pi/4$ es máximo

2) $y' = 3x^2 + 2x - 1$; $\quad y'' = 6x + 2$;

$$y' = 0 \implies \begin{cases} x_1 = 1/3; & y''(1/3) > 0 \implies \text{mínimo} \\ x^2 = -1; & y''(-1) < 0 \implies \text{máximo} \end{cases}$$

16. 1) Extremos en $x = k\pi/2$,

$$k \in Z \begin{cases} k \text{ par} \to \text{mínimos} \\ k \text{ impar} \to \text{máximos} \end{cases}$$

La función es creciente en el conjunto

$$\bigcup_{n \in Z} \left(2n \frac{\pi}{2}, (2n+1) \frac{\pi}{2} \right)$$

y decreciente en

$$\bigcup_{n \in Z} \left((2n+1) \frac{\pi}{2}, (2n+2) \frac{\pi}{2} \right)$$

2) No tiene extremos. Es siempre decreciente.
3) Tiene un mínimo en $x = 0$. Decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

17. En B, $f(a) \neq f(b)$. En C no es derivable la función en todo $x \in (a, b)$. En D no es continua en el cerrado $[a, b]$.

18.

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = v_0 6 - 5 \cdot 36 \implies v_0 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$h = -5t^2 + 30t$$

$$h' = -10t + 30 = 0 \implies t = 3 \text{ s}$$

$$h_{\text{máx}} = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 = 45 \text{ m}.$$

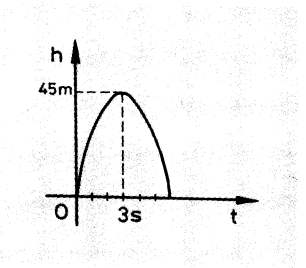


FIG. 4.22.

19. La piedra alcanza 45 m de altura a la velocidad promedio de 15 m/seg, que es la velocidad en el momento $t = 1{,}5$ seg.

20. 1) $-1/3$.

2) Utilizando dos veces la regla de l'Hôpital, el límite sale igual a 2.

3) 1/3. (Usando l'Hôpital tres veces.)

4) Simplificando por $x-3$, el límite da 1/5.

21. 1) Tomando logaritmos,

$$\lim (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}\cdot \ln \operatorname{ctg} x}$$

Por l'Hôpital, el límite del exponente es -1; por tanto, el límite pedido es e^{-1}.

2. Tomando logaritmos,

$$e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\ln(1-x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(1-x):\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}x}\right]} = e^0 = 1.$$

(Se ha utilizado l'Hôpital, dos veces.)

3) 1.

4) 1/2 (l'Hôpital, dos veces).

22. *a)* Punto de inflexión;

b) punto de inflexión;

c) cóncava;

d) cóncava;

e) cóncava.

23. $y = x^4 - 2x^2 + 1$; $y' = 4x^3 - 4x$; $y'' = 12x^2 - 4$; $y''' = 24x$;

$$y'' = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad y'''\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \neq 0 \Longrightarrow \begin{cases} I_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4}{9}\right) \\ I_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{4}{9}\right) \end{cases}$$

24. *a)* Sin puntos de inflexión; convexa en $(0, \infty)$.

b) Inflexión en 0; convexa en $(-\infty, 0)$; cóncava en $(0, \infty)$.

c) Idem *b*.

25. $\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty} y/x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+9} = 1 \\ b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-9x}{x^2+9} = 0 \end{array}\right\} y = x$

26. $y = 4x^3 - 4x$; $y' = 12x^2 - 4$; $y'' = 24x$; $y'' = 0 \Longrightarrow x = 0$;
$y'''(0) \neq 0 \Longrightarrow I(0, 0)$.

27. $S = \frac{1}{2} bc$;

$b + c = 20 \Longrightarrow b = 20 - c$;

$$S=\frac{1}{2}(20-c)c=\frac{1}{2}(20c-c^2);$$

$$S'=\frac{1}{2}(20-2c);\quad S'=0\Longrightarrow c=10\ \text{m};$$

$$S''(10)<0\Longrightarrow S_{\text{máx}};\quad a=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}\ \text{m}.$$

28. $V=(8-2x)\cdot(4-2x)\cdot x=4x^3-24x^2+32x;$

$$V'=12x^2-48x+32;$$

$$V'=0\Longrightarrow x=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3};$$

$$V''=24x-48;\quad V''\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)<0\Longrightarrow V_{\text{máx}}.$$

29. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h;\quad r^2=R^2-(h-R)^2;\quad V=\frac{\pi h}{3}\cdot(2Rh-h^2);$

$$V'=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2);$$

$$V'=0\Longrightarrow\begin{cases}h=0\\ h=4/3\ R=12\ \text{cm};\end{cases}\quad r=6\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

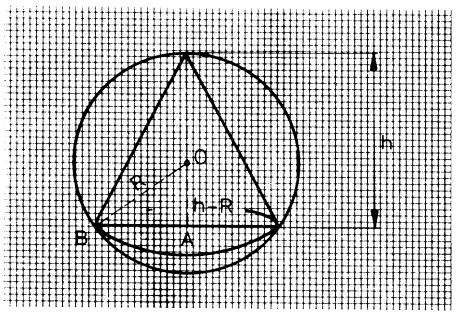


FIG. 4.23.

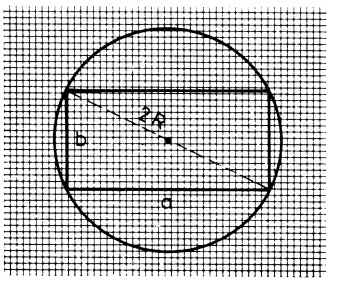


FIG. 4.24.

30. $S=a\cdot b;$

$$4R^2=a^2+b^2\Longrightarrow b=\sqrt{4R^2-a^2}$$

$$S=\sqrt{4R^2a^2-a^4}\ ;$$

$$S'=\frac{8R^2a-4a^3}{2\sqrt{4R^2a^2-a^4}};\quad S'=0\Longrightarrow\begin{cases}a=0\\ a=R\sqrt{2};\end{cases}\quad a=b=10\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

31. $P=2a+2b;$

$$S=200=a\cdot b\Longrightarrow b=\frac{200}{a};$$

$$P=2a+\frac{400}{a};\quad P'=2-\frac{400}{a^2};\quad P'=0\Longrightarrow a=b=10\sqrt{2}\ \text{m}.$$

32. $v_m = \dfrac{0{,}49 + 0{,}51 + 0{,}53 + 0{,}54}{4} = 0{,}5175$ voltios.

33. Peso: $p = x + y$.

Coste: $C = kx^2 + ky^2 = kx^2 + k(p-x)^2 = kp^2 + 2kx^2 - 2pkx$.

Como $x < p \Longrightarrow 2kx^2 < 2pkx$ y C habrá disminuido al partir.

$C' = 4kx - 2pk = 0 \Longrightarrow x = p/2$; $C''(p/2) > 0 \Longrightarrow$ precio mínimo.

4.3

Integral indefinida

1. FUNCIONES PRIMITIVAS

Aunque el curso pasado ya se manejó la idea, es conveniente iniciar el capítulo estableciendo, de nuevo, el concepto de *función primitiva.*

Ejemplo 22

La figura 4.25 representa un trozo del cuaderno de ejercicios de un alumno. En él aparecen, parcialmente, unas funciónes y sus correspondientes derivadas. ¿Es posible «rehacer» las funciones iniciales que se han perdido?

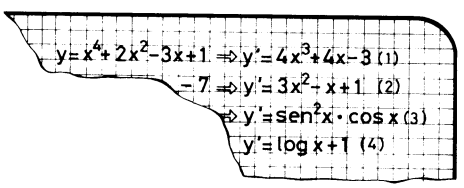


FIG. 4.25.

La [1] se ha conservado entera.

La [2] parece ser la derivada de una función polinómica. Como al derivar disminuye el grado en una unidad, se podría pensar en la función

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Su derivada habría de ser:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

que, igualada a la [2], produce los valores de los coeficientes

$$a=1; \quad b=-1/2; \quad c=1$$

La función queda determinada, excepto en una constante C, que sería su término independiente

$$y=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

En este caso ha habido suerte porque, a pesar de la rotura del papel, puede verse que esa C era un -7. Así que

$$y=x^3-\frac{1}{2}x^2+x-7$$

La función [3] hace pensar en la «regla de la cadena»; es un producto, y el factor $\cos x$ es la derivada de $\operatorname{sen} x$, que aparece en el otro factor. Si se sustituye $\operatorname{sen} x$ por u, la [3] queda

$$y'=u^2\cdot u'$$

que sugiere automáticamente la función polinómica de la que procede, que es

$$y=\frac{1}{3}u^3$$

Por tanto, $y=\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C$ es la función pedida. Aquí, de C nada podemos decir, y puede ser cualquier número real.

La [4] es una suma, por lo que podría tratarse de la derivada de un producto. Puede pensarse que ha habido una simplificación

$$y'=\log x+1=\log x+\frac{x}{x}$$

y, como la derivada de x es 1 y la de $\log x$ es $1/x$, la función inicial era $y=x\log x+C$.

Ejercicio 34

Díganse de qué funciones son derivadas las funciones

a) $y'=4x^3+2$;
b) $y'=2\cos 2x$;
c) $y'=-1/x^2$.

Ejemplo 23

Es frecuente que la ley que rige la velocidad de variación de un fenómeno sea más sencilla que la ley del propio fenómeno. Y, siendo la velocidad la

derivada de la función respecto del tiempo, puede llegarse a establecer la ley del fenómeno partiendo de la ley-velocidad de su variación.

Es claro, por ejemplo, que el crecimiento de la Humanidad es proporcional en cada instante a la población P en ese momento. Consideremos que la proporción es de un 2 por 1 000 anual. Tendremos:

$$\frac{P'}{P} = 0{,}002$$

Ahora bien, P'/P es la derivada logarítmica de la función P

$$\frac{P'}{P} = (\ln P)' = 0{,}002$$

por tanto,

$$\ln P = 0{,}002\, t + C \qquad (C, \text{ constante arbitraria})$$

que equivale a

$$P = e^{0{,}002\, t + C} = e^{C} \cdot e^{0{,}002\, t} = C_1 \cdot e^{0{,}002\, t}$$

Por lo visto, la función P depende de una constante multiplicativa $C_1 = e^C$. Si se considera el dato adicional de que, para $t = 0$ (año 1976), $P_0 = 3\,600\,000\,000$ de habitantes, queda determinada la constante C_1, que es, precisamente, P_0. Queda así determinada la función-población, que es la exponencial

$$P = 3\,600\,000\,000\ e^{0{,}002\, t}$$

Se denomina *función primitiva* de una función dada, f, una función F, tal que $F' = f$.

El proceso de cálculo de funciones primitivas se llama *integración indefinida* y es la situación recíproca de la derivación.

> A una función derivada le corresponden una infinidad de funciones primitivas y la diferencia de dos cualesquiera es una constante.

Ejercicio 35

Hállense las funciones derivadas de las funciones:

$$y = x^3 + \frac{3}{2}x^2; \qquad y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7; \qquad y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Sobre el ejercicio anterior se habrá observado que todas las funciones propuestas tienen la misma función derivada

$$y' = 3x^2 + 3x.$$

Efectivamente, la función $y = f(x) + C$ se puede considerar formada por la

adición de las funciones

$$u = f(x)$$
$$v = C \text{ (constante)}$$

y, así, su función derivada será la suma de las funciones de u y de v

$$y' = f'(x) + 0$$

La función $f'(x)$ es la función derivada de las infinitas primitivas

$$y = f(x) + C, \qquad \forall\, C \in R$$

En la figura 4.26 se han representado las infinitas funciones primitivas de la parábola $y = 3x^2 + 3x$. La que se dibuja con trazo más grueso es la primera que se citaba en el ejercicio 35.

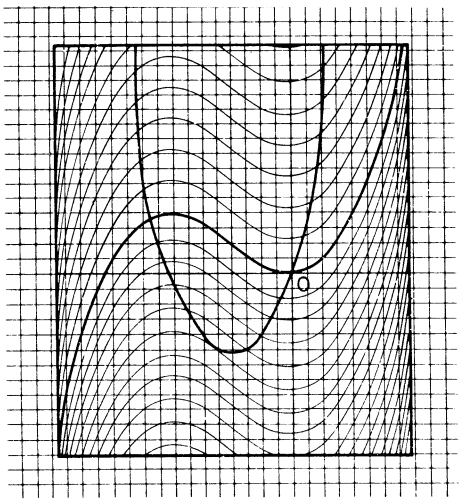


FIG. 4.26

Ejercicio 36

En Cinemática se sabe que la función derivada del espacio es la función velocidad y que la derivada de ésta es la función aceleración; es decir, que si $e = f(t)$, $e' = v$ *y* $v' = a$. *El movimiento de caída de cuerpos, debido a la gravedad, es uniformemente acelerado, con una aceleración constante de* g $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. *Entonces la función aceleración es en este caso la función constante* $a = g$. *Compruébese que las primitivas de a tienen la forma* $v = v_0 + gt$; *y también, que las primitivas de v son del tipo*

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

Para expresar las constantes, en cada caso, se han utilizado los símbolos v_0 *y* e_0, *respectivamente.*

Ejercicio 37

Compruébese que el área del círculo en función del radio es una primitiva de la función longitud de la circunferencia, que lo limita.

2. INTEGRALES INMEDIATAS

Es necesario dominar las reglas de derivación para buscar con éxito las funciones primitivas de una dada; pero conviene tener en cuenta que:

a) no toda función tiene primitiva, y que
b) no toda primitiva puede expresarse mediante combinaciones de funciones elementales.

Este doble hecho añade dificultad al ya laborioso proceso de la *integración*. Dejaremos para cursos superiores la discusión de los puntos *a)* y *b)* y nos limitaremos al cálculo de integrales elementales. Conviene advertir que, en estos casos, dar por buena una función primitiva errónea no tiene excusa razonable, pues basta derivar la función resultante para comprobar si existió o no error en su cálculo.

Es frecuente utilizar la notación $\int f(x)\,dx$ para expresar la familia de primitivas de la función f. La especificación dx pone de relieve la variable independiente, respecto de la cual se integra.

El cuadro que sigue facilita algunas de las llamadas *integrales inmediatas*. Se trata, lógicamente, de las reglas recíprocas de la derivación, vistas el curso pasado.

1. $\int k\,dx = kx + C, \quad \forall\, k \in R.$
2. $\int x^m\,dx = \dfrac{1}{m+1}\,x^{m+1} + C \quad (m \neq -1).$
3. $\int (du \pm dv) = u \pm v + C.$
4. $\int k\,du = k \cdot \int du = k \cdot u + C \ (k \in R).$
5. $\int (u\,dv + v\,du) = u \cdot v + C.$
6. $\int \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \dfrac{u}{v} + C.$
7. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln |x| + C.$
8. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln |f(x)| + C.$

9. $\int -\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x} + C.$

10. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}\,dx = n \cdot \sqrt[n]{f(x)} + C.$

11. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

12. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \quad (a > 0).$

13. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

14. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

15. $\left.\begin{array}{l} \int \sec^2 x\,dx \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx \end{array}\right\} = \operatorname{tg} x + C.$

16. $\left.\begin{array}{l} \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx \\ \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} \\ \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx \end{array}\right\} = -\operatorname{ctg} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

18. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad (a \neq 0).$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a + x^2}| + C \quad (a \neq 0).$

Ejercicio 38

Compruébense, derivando, las reglas 20 *y* 21 *del cuadro anterior.*

Ejercicio 39

Hállense las primitivas de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^4 - 3x^2$;

b) $y = 4e^x$;

c) $y = 1/\sqrt{x}$;

d) $y = \sqrt[3]{x}$;

e) $y = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$;

f) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$;

g) $y = (x^2 - 10)^{-1/2}$;

h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$;

i) $y = \cos 2x$;

j) $y = \operatorname{tg} x$;

k) $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{1+x^2}$;

l) $y = \operatorname{sen} 2x$.

Ejemplo 24

Calcúlense: *a)*

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

Como

$$\operatorname{sen} x/2 = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}},$$

sustituyendo, se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$$

b)

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx =$$

$$= \int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x) \, dx = \int \cos x \, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx =$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + C$$

Ejercicio 40

Hállense:

$$a)\ \int \cos^4 x\, dx; \qquad b)\ \int \operatorname{sen}^5 x\, dx.$$

Ejemplo 25

En cursos superiores se justificará cumplidamente el cálculo integral de funciones racionales $P(x)/Q(x)$. Sin embargo, indicaremos aquí cómo se hace en algunos casos sencillos:

a) Si el polinomio dividendo es de grado superior o igual al del polinomio divisor, se hace la división y se sustituye por la suma del cociente más el resto partido por el divisor. Así:

$$\int \frac{x^3+x+1}{1+x^2}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \operatorname{arc\,tg} x + C$$

b) Si el grado del polinomio dividendo es menor que el del polinomio divisor y aquél no es la función derivada de éste (porque, si lo fuera, se trataría, simplemente, del logaritmo neperiano del polinomio divisor), entonces se descompone en factores el polinomio divisor, a fin de realizar el cálculo que se indica:

$$I = \int \frac{3x^3+6x^2-2x+1}{x^4+5x^3+7x^2+5x+6}\,dx = \int \frac{3x^3+6x^2-2x+1}{(x+3)(x+2)(x^2+1)}\,dx$$

Busquemos cuatro coeficientes, A, B, C y D, que permitan la identidad

$$\frac{3x^3+6x^2-2x+1}{(x+3)(x+2)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(x+2)(x^2+1)+B(x+3)(x^2+1)+(Cx+D)(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+2)(x^2+1)}$$

Los polinomios numeradores han de ser idénticos

$$3x^3+6x^2-2x+1 \equiv A(x+2)(x^2+1)+B(x+3)(x^2+1)+(Cx+D)(x+3)(x+2)$$

Ambos polinomios han de tomar iguales valores numéricos para cualquier número real. Por ejemplo,

para $x=-2$:

$$5 = A\cdot 0 + 5\cdot B \implies B = 1$$

para $x=-3$:

$$-20 = -10\cdot A \implies A = 2$$

para $x=0$:

$$1=2A+3B+6D \implies D=-1$$

para $x=1$:

$$8=6A+8B+12C+12D \implies C=0$$

Hemos conseguido:

$$I=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=2\ln(x+3)+\ln(x+2)-\operatorname{arc\,tg}x+C$$

Ejercicio 41

Calcúlese

$$\int\frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$$

3. METODOS DE INTEGRACION

La «regla de la cadena» para la derivación de funciones compuestas proporciona dos métodos correlativos de integración indefinida: el de inclusión bajo el signo diferencial y el llamado método de sustitución.

Considérese que $F(u)$ es una primitiva de la función $f(u)$, y que $u=u(x)$ es una función derivable de x. Entonces,

$$F(u)=\int f(u)\,du \iff F(u(x))=\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx.$$

La utilización de la doble implicación en uno u otro sentido da origen a los métodos citados.

3.1. Inclusión bajo el signo diferencial

Para hallar $\int(\ln x)^3\frac{1}{x}\,dx$ se debe observar que

$$\frac{1}{x}\,dx=d(\ln x).$$

Entonces, si se pone $u=\ln x$,

$$I=\int(\ln x)^3\frac{1}{x}\,dx=\int u^3\,du=\frac{1}{4}u^4+C$$

Sustituyendo,

$$I=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C$$

Ejemplo 37

Para calcular $I=\int x^2 e^{x^3}\,dx$, multiplicamos y dividimos por 3, y se observa que

$$3\,x^2\,dx=d(x^3).$$

Poniendo $u=x^3$, se escribe:

$$I=\frac{1}{3}\int e^u\,du=\frac{1}{3}e^u+C,$$

que, en función de x, resulta

$$I=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

3.2. Sustitución de la variable de integración

Ejemplo 38

Dada la integral

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$$

hagamos el cambio $x=\frac{1}{t}$, lo que supone

$$dx=-\frac{1}{t^2}\,dt$$

Así,

$$I=\int\frac{-1/t^2\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1/t^2-2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-t^2}}$$

Esa integral es inmediata:

$$I=-1/\sqrt{2}\,\text{arc sen}\,\frac{t}{1/\sqrt{2}}$$

Si se deshace el cambio,

$$I = -1/\sqrt{2}\ \text{arc sen}\ \frac{\sqrt{2}}{x}$$

Adviértase que sólo tiene sentido para $|x| \geqslant \sqrt{2}$.

Ejemplo 29

En el cálculo de $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, hagamos el cambio

$$x = \text{sen}\ t, \qquad dx = \cos t\ dt.$$

La integral se convierte en

$$I = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t}\,\cos t\ dt = \int \cos^2 t\ dt.$$

Usando la misma técnica que se manejaba en el ejemplo 24, esa integral, tras deshacer el cambio, resulta

$$I = \frac{1}{2}\ \text{arc sen}\ x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Ejercicio 42

Calcúlense las siguientes integrales, mediante inclusión bajo el signo diferencial:

a) $\int \text{sen}\ x \cos x\ dx$;

b) $\int \text{sen}\ (\ln x)\,\frac{dx}{x}$;

c) $\int \frac{dx}{ax+b}$;

d) $\int x\sqrt[3]{a-x^2}\,dx$;

e) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

f) $\int a^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x\ dx$.

Ejercicio 43

Haciendo sustitución de variable, hállense las siguientes integrales

a) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx$, cambio: $x = t^6$;

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$, cambio: $x = \frac{t^2-1}{2}$;

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$, cambio: $x = 2\ \text{sen}\ t$;

d) $\int \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$, cambio: $e^x = t^2 - 1$.

3.3. Método de integración por partes

Siendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$,

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$$
$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

La fórmula recuadrada es la que se usa para la integración por partes, que suele ser conveniente cuando se trata de la integral de un producto de dos funciones, una de las cuales, al menos, es trascendente.

Escoger las funciones u y v con acierto es cuestión de destreza y hábito.

Ejemplo 30

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$u = x \implies du = dx$

$dv = e^x\,dx \implies v = e^x$

Ejemplo 31

$$\int x \cos 2x\,dx = \frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

$u = x \implies du = dx$

$dv = \cos 2x\,dx \implies v = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

Si, una vez escogidas la u y la v, resulta que la integral que aparece al aplicar la integración por partes es más complicada que la que se propuso, ha de darse «marcha atrás» y reconsiderar a qué se llama u y v.

Otras veces ha de aplicarse la integración por partes sucesivamente a las integrales que van apareciendo en el método, consiguiéndose una integración inmediata al cabo de dos o más veces de aplicación del método.

Ejemplo 32

$$\int (\ln x)^2\,dx = x\,(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x\,(\ln x)^2 - 2\left(x\cdot\ln x - \int dx\right) =$$

$u=(\ln x)^2 \Longrightarrow du=\dfrac{2}{x}\ln x\,dx$; $dv=dx \Longrightarrow v=x$

$u=\ln x \Longrightarrow du=\dfrac{dx}{x}$; $dv=dx \Longrightarrow v=x$

$$= x\,(\ln x)^2 - 2x\cdot\ln x + 2x + C.$$

Ejercicio 44

Calcúlense las siguientes integrales:

a) $\int x/e^x\,dx$;

b) $\int x \operatorname{arc\,sen} x\,dx$;

c) $\int x^2 e^{3x}\,dx$;

d) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$;

e) $\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx$;

f) $\int x^2 e^{-x}\,dx$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.3

34. *a)* $y=x^4+2x+C$; *b)* $y=\operatorname{sen} 2x+C$; *c)* $y=\dfrac{1}{x}+C$.

35. Las tres funciones tienen de función derivada $y'=3x^2+3x$.

36. $v'=0+g=a$; $e'=0+v_0+gt=v$.

37. $C=\pi R^2$; $C'=2\pi R=L$.

38 $y=1/2a\cdot\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$; $y'=1/2a\cdot\dfrac{x+a}{x-a}\cdot\dfrac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2}=\dfrac{1}{x^2-a^2}$;

$y=\ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right|+C$;

$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a+x^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{a+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}$.

39. *a)* $Y=\dfrac{2}{5}x^5-x^3+C$;

b) $Y=4e^x+C$;

c) $Y=2\sqrt{x}+C$;

d) $Y=\dfrac{3}{4}x^{4/3}+C$;

e) $Y = \ln(\operatorname{sen} x) + C$;

f) $Y = \ln(x^2 + 1) + C$;

g) $Y = \operatorname{arc\,sen} x/\sqrt{10} + C$;

h) $Y = \ln|x + \sqrt{4 + x^2}| + C$;

i) $Y = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$;

j) $Y = -\ln(\cos x) + C$;

k) $Y = \ln(x + 1) + \operatorname{arc\,tg} x + C$;

l) $Y = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

40. *a)* $$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{4}\,dx =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C;$$

b) $$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cdot \operatorname{sen} x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^2\,d\cos x =$$

$$= -\cos x + \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{2}{3}\cos^3 x + C.$$

41. $$\frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+1} \Longrightarrow A = 2;\ B = 1;$$

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx = 2\cdot\ln(x-1) + \operatorname{arc\,tg} x + C$$

42. $$\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,d(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C;$$

b) $$\int \operatorname{sen}(\ln x)\frac{dx}{x} = \operatorname{sen}(\ln x)\,d(\ln x) = -\cos(\ln x) + C;$$

c) $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C;$$

d) $$\int x\sqrt[3]{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (a-x^2)^{1/3}d(x^2) = -\frac{3}{8}(a-x^2)^{4/3} + C;$$

e) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{d(x^2)}{2\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C;$$

f) $$\int a^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\,dx = \int a^{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\ln a}\cdot a^{\operatorname{sen} x} + C.$$

43. *a)* $\dfrac{2}{3}x^{3/2} + \dfrac{3}{4}x^{4/3} + C$;

b) $\ln\dfrac{x+1-\sqrt{2x+1}}{x} + C$;

c) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}\right)+C=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C$;

d) $\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}-2(e^x+1)^{1/2}+C$.

44. *a)* $-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+C$;

b) $\frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{arc\,sen}x-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$;

c) $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2x}{9}e^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$;

d) $x\cdot\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

e) $x\cdot\operatorname{arc\,sen}x+\sqrt{1-x^2}+C$;

f) $-x^2\cdot e^{-x}-2x\cdot e^{-x}-2e^{-x}$.

4.4

Integral definida. Area

1. INTEGRACION DE FUNCIONES ESCALONADAS POSITIVAS

Se dice que una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b] \subset R$ es escalonada si es constante en cada uno de los finitos subintervalos abiertos (x_i, x_{i+1}).

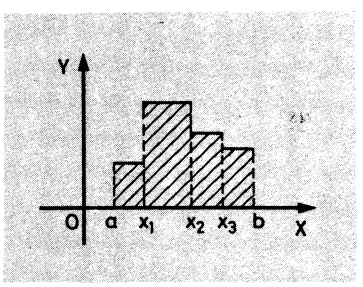


FIG. 4.27.

El área de un rectángulo delimitado por

— un intervalo (x_i, x_{i+1}),
— la gráfica de la función sobre él, $f(x) = c_i$ (constante), y
— las paralelas por x_i y x_{i+1}, al eje de ordenadas,

será:

$$A_i = c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Por tanto, si se hace $a = x_0$ y $b = x_{n+1}$, el área de la zona rayada en la figura 4.27 será igual a la suma

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

que es, por definición, la integral definida de la función escalonada f en $[a, b]$, y se designa con el simbolismo

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Si $c \in [a, b]$, es fácil observar que toda función escalonada en el intervalo $[a, b]$ también resulta escalonada al restringirla a los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, cumpliéndose, además,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

La identificación descrita de la integral definida con el área supone que la función es positiva. Si se tratara de una función negativa, la integral produciría el área, cambiada de signo. Por tanto, para hallar el área en el caso de una función escalonada cualquiera habrá que subdividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos para los que el signo de la función se mantenga constante y luego sumar las integrales, respecto a ellos, en valor absoluto. Se conviene en que si $a > b$,

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Ejercicio 45

Justifíquese que $\int_a^a f = 0$, *para toda función* f *definida en* a.

Ejercicio 46

Demuéstrese que $\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$, *para* $k =$ *constante.*

También se demuestra que

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Ejercicio 47

Calcúlense las integrales definidas en el intervalo $[1, 5]$ *de las funciones:*

a) $f(x) = 3, \ \forall x \in [1, 5]$;

b) $g(x) = \begin{cases} 2, & \forall x \in [1, 3] \\ 1, & \forall x \in (3, 5] \end{cases}$;

c) $h(x) = E[x]$ (parte entera de x), $\forall x \in [1, 5]$.

Sea f, ahora, una función escalonada, positiva, definida en $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ se puede considerar la función

$$F(x) = \int_a^x f$$

que expresa el área de los recintos antes descritos, en función del extremo del intervalo que se considere. En la figura 4.28 se representan las tres funciones del ejercicio inmediatamente anterior y las correspondientes funciones $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$.

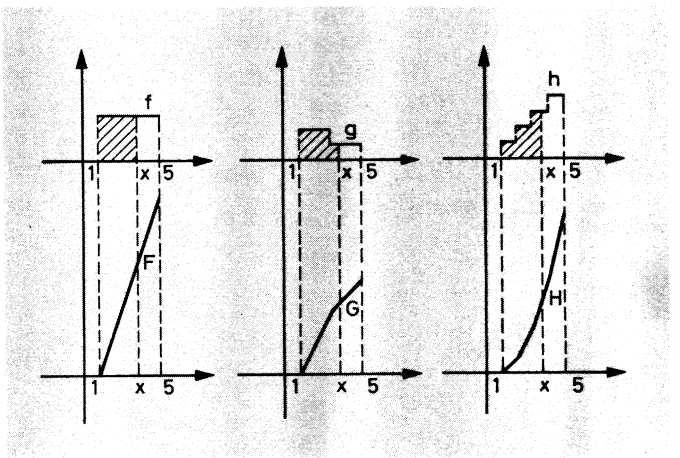


FIG. 4.28.

Mirando la figura 4.28 puede observarse que, para una misma abscisa x,

- $F(x)$ da el área delimitada por f, desde 1 a x, y
- $f(x)$ proporciona la velocidad de crecimiento del área $F(x)$ en x.

Lo mismo sucede con las funciones g y G y con las h y H, en los puntos en que g y h son continuas. Usando terminología del capítulo anterior, diremos que F, G y H son primitivas de f, g y h, respectivamente. En efecto, supóngase que x y $x + h$ pertenecen al mismo intervalo (x_i, x_{i+1}). Entonces, como

$$F(x) = \int_a^x f = c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) + \ldots + c_i(x - x_i)$$

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f = c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) + \ldots + c_i(x + h - x_i),$$

resulta

$$F(x+h) - F(x) = c_i(x + h - x_i) - c_i(x - x_i) = c_i(x + h - x_i - x + x_i) = c_i h;$$

por tanto,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{E(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c_i h}{h} \quad c_i = f(x), \qquad x \in (x_i, x_{i+1})$$

Ejercicio 48

Represéntense gráficamente las funciones

$$f(x)=\begin{cases} 2, & x\in[-3,1) \\ -1, & x\in[1,4) \\ 1, & x\in[4,6] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad F(x)=\int_{-3}^{x} f.$$

2. INTEGRAL DE FUNCIONES CONTINUAS, POSITIVAS Y MONOTONAS

La función f, representada en la figura 4.29, es continua y positiva. Además, se ha tomado monótona creciente, pero es fácil traducir los resultados que se van a obtener al caso de que fuera decreciente.

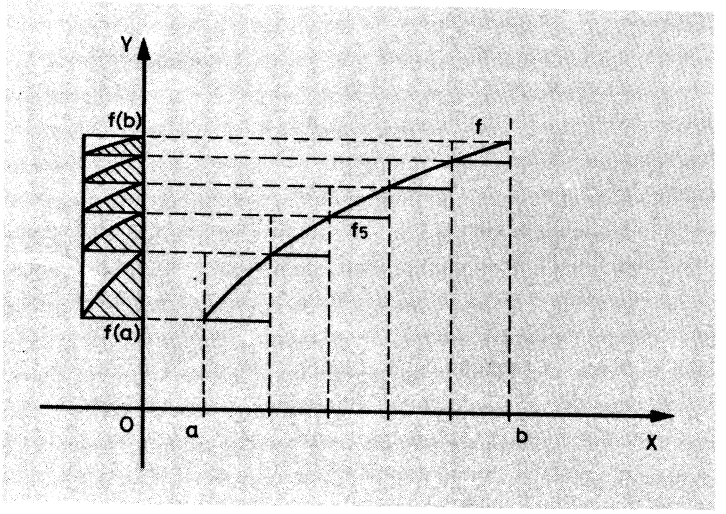


FIG. 4.29.

La gráfica de la función, el eje OX y las rectas paralelas al eje de ordenadas, $x=a$ y $x=b$, determinan un trapecio curvilíneo.

Se puede definir una función escalonada f_n (en la figura, la f_5), que sea constante en los intervalos resultantes de dividir el segmento ab en n partes iguales, siendo esta constante el valor de f en el extremo inferior de cada uno de los intervalos.

Si se comparan las áreas de las superficies determinadas por la curva f y por la escalonada f_n, se observa que su diferencia no excede del valor

$$A(f)-A(f_n)\leqslant[f(b)-f(a)]\cdot\frac{b-a}{n}$$

ya que, transportados los triángulos mixtilíneos al eje OY (véase la figura) su área es inferior a la del rectángulo de base $\frac{b-a}{n}$ y altura $f(b)-f(a)$.

Si n tiende a infinito, la diferencia de áreas será tan pequeña como se quiera. Por otra parte, la sucesión de áreas $A(f_n)$ es monótona creciente y acotada por el valor $f(b)(b-a)$, área del rectángulo circunscrito; por tanto, tiene límite que se denomina *integral definida de f en* $[a, b]$:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} A(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = A(f)$$

Ejercicio 49

Dada la función $f(x)=2x+3$, *definida en el intervalo* $[2, 8]$, *establézcanse las funciones escalonadas* f_3 *y* f_6, *y calcúlese* $A(f)$, $A(f_3)$ *y* $A(f_6)$.

El siguiente cuadro reúne las principales propiedades de la integral definida, que proceden de las de la integral de funciones escalonadas y de las propiedades de los límites de sucesiones.

1. Si $c \in [a, b]$, $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$
2. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
3. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
4. $\int_a^b kf = k \cdot \int_a^b f$, $k =$ constante.

Si la función f fuera negativa, continua y monótona, se define su integral en $[a, b]$ mediante

$$\int_a^b f = -\int_a^b -f$$

y es el área, cambiada de signo, del trapecio curvilíneo determinado por ella.

Si una función cambia de monotonía en el intervalo $[a, b]$ se aplica la propiedad primera para el cálculo de su integral. De igual manera ha de procederse si sufre un cambio de signo, pero entonces la integral no es igual al área, sino que para obtener ésta han de sumarse los valores absolutos de las integrales calculadas sobre los intervalos en los que el signo de f es constante (Fig. 4.30).

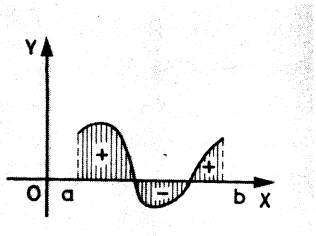


FIG. 4.30.

3. REGLA DE BARROW

Como en el caso de las funciones escalonadas, dada una función f, definida en $[a, b]$, se puede considerar la función F, tal que a cada $x \in [a, b]$ le hace corresponder

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f}$$

La función F, así definida, es una primitiva de la función f.

En efecto, la figura 4.31 pone de manifiesto que la diferencia

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f$$

es el área del trapecio curvilíneo $AA'B''B$, comprendido entre el rectángulo $AA''B''B$ y el $AA'B'B$.

Por tanto, ordenando dichas áreas y dividiendo por h se obtiene:

$$\frac{1}{h} f(x)h \leq \frac{1}{h} [F(x+h) - F(x)] \leq \frac{1}{h} f(x+h)h$$

$$f(x) \leq \frac{1}{h} [F(x+h) - F(x)] \leq f(x+h)$$

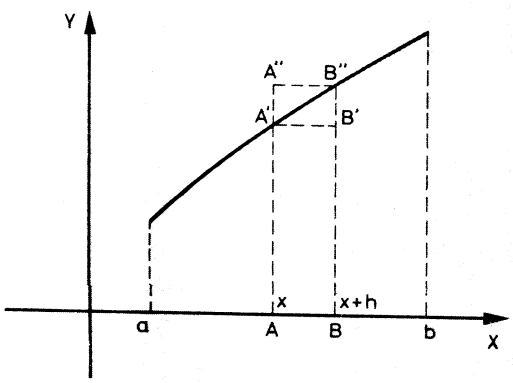


FIG. 4.31.

En fin, pasando al límite para $h \to 0$ y, teniendo en cuenta que la función es continua,

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

En el capítulo anterior se afirmaba que dos primitivas se diferenciaban siempre en una constante, de modo que, si $G(x)$ es otra primitiva de f,

$$F(x) = \int_a^x f = G(x) + C$$

entonces,

$$F(a) = \int_a^a f = 0 = G(a) + C \Longrightarrow C = -G(a);$$

por tanto,

$$F(b) = \int_a^b f = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

Regla de Barrow:

Si G es una primitiva de f en $[a, b]$,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Mediante la regla de Barrow se calcula fácilmente la integral definida de una función, de primitiva conocida.

Ejemplo 33

Una primitiva de la función $x^2 + 3$ es la función $\frac{x^3}{3} + 3x$. Por tanto, la integral definida en el intervalo [3, 6] es

$$\frac{6^3}{3} + 3 \cdot 6 - \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3 = 72$$

Estos cálculos suelen disponerse del siguiente modo:

$$\int_3^6 (x^2 + 3)\, dx = \frac{x^3}{3} + 3x \Big|_3^6 = 72$$

Ejemplo 34

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } x \Big|_0^1 = \text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 50

Calcúlense las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$;

b) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

c) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}$;

d) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$;

e) $\int_1^e \ln x\, dx$;

f) $\int_6^{12} \frac{dx}{x+3}$.

Si en el cálculo de una primitiva se hace un cambio de variable, ha de tenerse la precaución de «deshacer» el cambio, antes de sustituir los límites de integración. Otra técnica, a veces conveniente, es calcular esos límites en valores de la nueva variable. Los siguientes ejemplos aclaran lo que se dice.

Ejemplo 35

Calcúlese

$$\int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{5+4\cos x}.$$

Para hallar la primitiva, es cómodo el cambio

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} t \implies dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

con lo cual, la primitiva a calcular es

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{5+4\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{9+t^2} = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{3}$$

En este caso es difícil deshacer el cambio. Es más conveniente calcular los límites, respecto de la nueva variable t:

para $x = 0$, $\quad 0 = 2 \operatorname{arc\,tg} t \implies t = 0$

para $x = 2\pi/3$, $\quad 2\pi/3 = 2 \operatorname{arc\,tg} t \implies t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Entonces,

$$\int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{5+4\cos x} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{9+t^2} = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{9}$$

Ejemplo 36

La integral $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ se convierte en la integral $\int_1^e \frac{dt}{1+t^2}$ con el cambio

$$x = \ln t \implies dx = \frac{1}{t}\,dt$$

Calculando los nuevos límites,

$$\text{para } x = 0 \implies t = 1$$
$$\text{para } x = 1 \implies t = e$$

Así,

$$\int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t \Big|_1^e = \operatorname{arc\,tg} e - \operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg} e - \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 51

Calcúlense:

a) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx$. Cambio: $x = \sqrt[4]{t}$;

b) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$. Cambio: $\alpha = \operatorname{sen} t$.

4. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Una de las aplicaciones elementales de la integral definida es el cálculo de áreas de recintos planos, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 37

Calcúlense las áreas limitadas por

a) la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, el eje de abscisas y la ordenada de $x = 2$;

b) la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y la bisectriz del primer y tercer cuadrantes;

c) la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y su girada $-90°$, alrededor del origen.

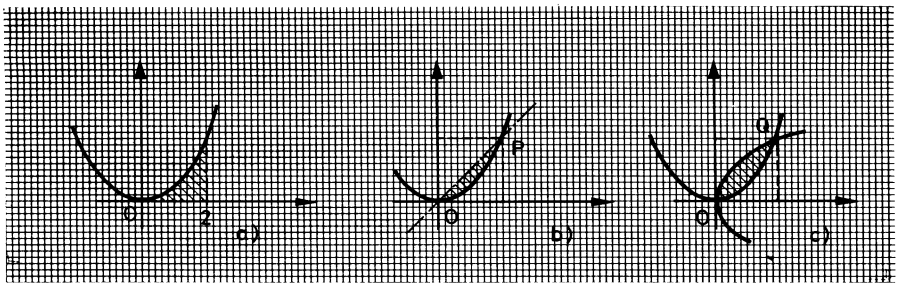


FIG. 4.32.

a) $A=\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{6}-0=\frac{4}{3}u^2$ de área;

b) $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=x \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} O(0,0) \\ P(2,2) \end{array}\right.$;

$$A=\int_0^2 x\,dx-\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{2}{3}u^2;$$

c) $\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x=\frac{1}{2}y^2 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} O(0,0) \\ Q(2,2) \end{array}\right.$;

$$A=\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx-\int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{4}{3}u^2.$$

Ejercicio 52

Calcúlense las áreas de los recintos que se indican:

a) *Limitado por las líneas de ecuaciones* $y=x^2-4$ *e* $y=2x+4$;

b) *limitado por la recta* $y=-1$ *y la curva* $y=-2x^2+2$;

c) *limitado por la curva* $y=x(x^2-6x+12)$, *el eje OX y la ordenada correspondiente a su punto de inflexión;*

d) *limitado por* $y=\frac{2x-2}{x}$, *su tangente en* $x=2$ *y el eje de abscisas.*

Otra de las aplicaciones sencillas del cálculo integral es la determinación del trabajo y energía físicos.

Ejemplo 38

Una fuerza varía con el tiempo, según la ecuación $F = 3e^t$, y se quiere saber el trabajo que realiza desde que inicia su movimiento la masa sobre la cual actúa, según la ecuación $s = 1/2t^2$, hasta el instante $t = 1$ segundo

$$dT = F \cdot ds$$

$$T = \int_{S_0}^{S_1} 3\, e^t\, ds = \int_0^1 3\, e^t \cdot t\, dt = 3 \int_0^1 e^t \cdot t\, dt$$

Integrando por partes,

$$\left| \begin{array}{rcl} t = u & \Longrightarrow & du = dt \\ e^t\, dt = dv & \Longrightarrow & v = e^t \end{array} \right.$$

$$\int e^t \cdot t\, dt = t \cdot e^t - \int e^t\, dt = e^t\,(t-1)$$

Entonces,

$$T = 3(e^t(t-1))\Big|_0^1 = 3 \text{ unidades de trabajo.}$$

Ejercicio 53

Una fuerza variable $F = -2 \operatorname{sen} t$ *hace recorrer un camino* $s = 3t + 1$ *a una masa, desde el instante* 0 *al instante* $\pi/2$. *Hállese el trabajo realizado.*

También el cálculo integral es el que se usa para hallar momentos de inercia de «cuerpos continuos». Para una masa dm, con radio de giro r, el momento de inercia es

$$dI = r^2\, dm$$

Dispuesta la masa en función del radio, integrando en el intervalo de variación del radio de giro, $[0, R]$, resulta

$$I = \int_0^R r^2\, dm$$

Ejemplo 39

Supóngase el cilindro, compuesto de infinitos tubos concéntricos, dibujado en la figura 4.33. El momento de inercia de uno de esos tubos es

$$dI = r^2\, dm$$

y, si ρ es la densidad, la masa de cada uno de ellos es

$$dm = \rho\, dV = \rho\, 2\pi hr\, dr$$

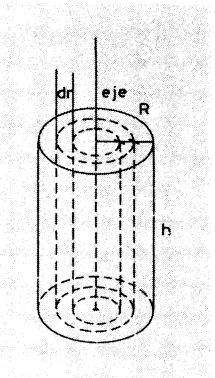


FIG. 4.33.

Integrando, desde que $r=0$ hasta que $r=R$,

$$I=2\pi\rho h\int_0^R r^3\,dr=\frac{1}{2}mR^2$$

que es el momento de inercia de un cilindro de masa m y radio R, respecto de su eje.

Ejercicio 54

Justifíquese que el momento de inercia de una barra homogénea respecto de un eje perpendicular por uno de sus extremos es

$$I=\frac{1}{3}ml^2$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.4

45. El intervalo de definición es de longitud cero.

46. La función kf es escalonada con la misma partición del intervalo $[a, b]$ que f.

$$\int_a^b kf=\sum_{i=0}^{n}kc_i(x_{i+1}-x_i)=k\sum_{i=0}^{n}c_i(x_{i+1}-x_i)=k\int_a^b f$$

47. *a)* 12; *b)* 6; *c)* 10.

48.

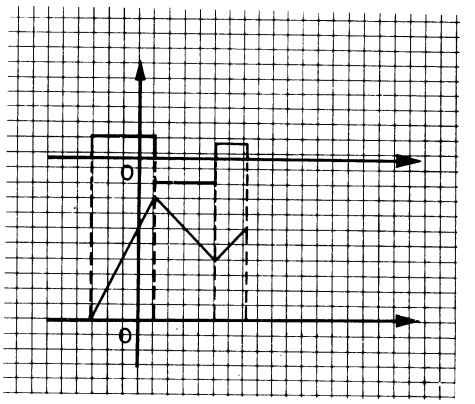


FIG. 4.34.

49.

$$f_3 = \begin{cases} 7, & x \in [2, 4) \\ 11, & x \in [4, 6) \\ 15, & x \in [6, 8] \end{cases} \qquad f_6 = \begin{cases} 7, & x \in [2, 3) \\ 9, & x \in [3, 4) \\ 11, & x \in [4, 5) \\ 13, & x \in [5, 6) \\ 15, & x \in [6, 7) \\ 17, & x \in [7, 8] \end{cases}$$

$A(f) = 78$
$A(f_3) = 66$
$A(f_6) = 72$

50. *a)* $-\cos x \Big|_0^{\pi} = 2;$

b) $2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2;$

c) $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = +\frac{\pi}{4};$

d) $a^2/2 \left(\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - x^2/a^2} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi}{4} a^2;$

e) $x (\ln x - 1)\Big|_1^e = -1;$

f) $\ln (x + 3)\Big|_6^{12} = \ln \frac{5}{3}.$

51. *a)* $\frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} x^4\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16};$

b) $\operatorname{arc\,sen} \alpha \Big|_0^{\pi/2} = +\frac{\pi}{4}.$

52. *a)*

$$A = -2\int_0^2 (x^2-4)\,dx + \int_{-2}^4 (2x+4)\,dx - \int_2^4 (x^2-4)\,dx$$

$$A = 36\,u^2 \text{ de área.}$$

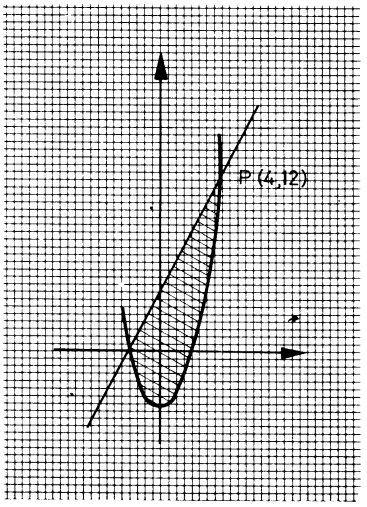


FIG. 4.35.

b) Lo mejor es hacer una traslación de ejes (Fig. 4.36)

$$Y = x$$

$$Y = y + 1$$

$$A = 2\int_0^{\sqrt{6}/2} (2X^2+3)\,dX = 2\sqrt{6}$$

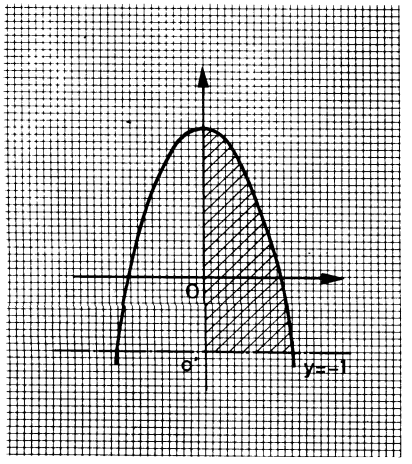


FIG. 4.36.

c) En la figura 4.37,

$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 12x)\, dx = 12\ u^2 \text{ de área}$$

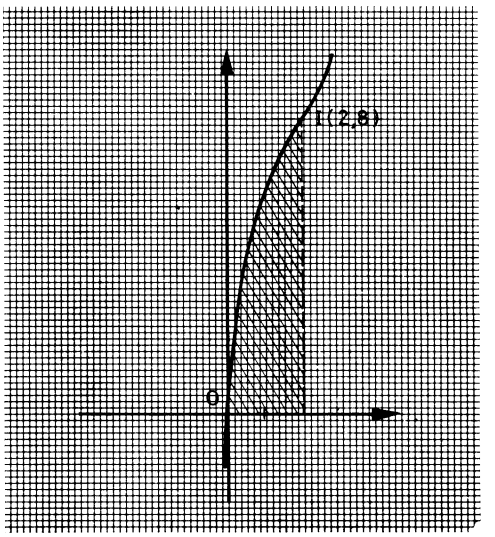


FIG. 4.37.

d) Sobre la figura 4.38,

$$A = \int_0^2 \frac{1}{2}\, x\, dx - \int_1^2 \frac{2x-2}{x}\, dx = 2 \ln 2 - 1.$$

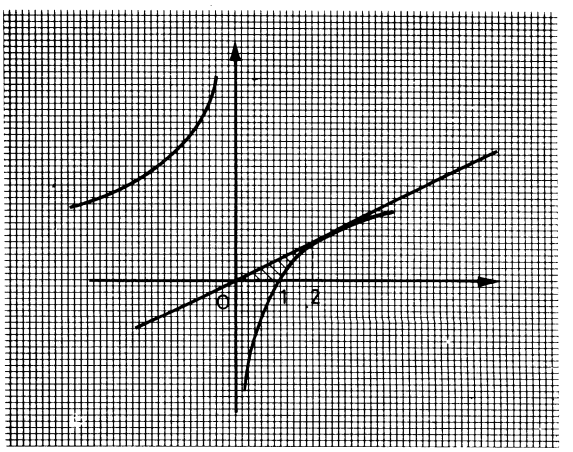


FIG. 4.38.

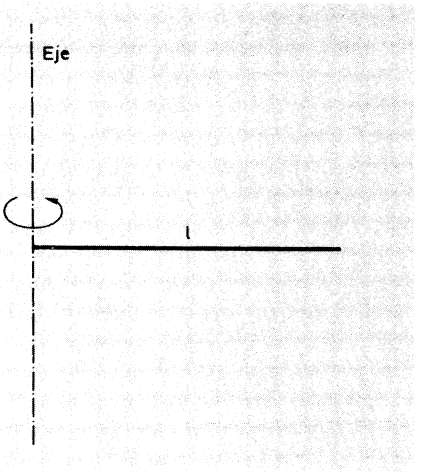


FIG. 4.39.

53. $T = \int_0^{\pi/2} -2 \operatorname{sen} t \cdot 3\, dt = 6 \cos t \Big|_0^{\pi/2} = -6$ unidades de trabajo.

54.

$$dI = r^2\, dm = r^2 \cdot (\rho dr); \qquad \rho = \text{densidad lineal:}$$

$$I = \int_0^l r^2 \cdot \rho\, dr = \rho \int_0^l r^2\, dr = \rho \frac{r^3}{3} \Big|_0^l = \rho \frac{l^3}{3}.$$

Pero $\rho l = m$ (masa de la barra). Luego

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

4.5

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. Calcúlese la diferencial de $f(x) = \cos x + \ln x^2$.

2. ¿Qué diferencia hay entre Δy y dy, para la función $y = x^3$, en el punto de abscisa 2, si $dx = \Delta x = 4$?

3. Compruébese que, siendo $y = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x$, es correcta la expresión $y'' + 4y = 0$.

4. Determínese la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 9x$ en el punto de abscisa 1.

5. Dadas la curva $y = 3x^2 + 5$ y la recta $y = 4x + k$, ¿qué valor ha de tener k para que esa recta sea tangente a la curva?

6. Hállense los máximos y los mínimos relativos de la función

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$$

7. Calcúlense los máximos y los mínimos de la función $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

8. Determínense los máximos y los mínimos de la función

$$y = 3x^3 - x^2 - 4x + 5$$

9. Determínense los valores de m, n, p y q, para que la función

$$y = mx^3 + mx^2 + px + q$$

tenga un máximo y un mínimo en los puntos $(0, 4)$ y $(2, 0)$, respectivamente.

10. Calcúlense a, b y c para que la función

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tenga un máximo de abscisa -4 y un mínimo en $x=0$. Se sabe, además, que su gráfica pasa por el punto $P(1, 1)$.

11. Hállense los máximos, mínimos e inflexiones de $y=x^3-x^2+1$.

12. Dada la función $y=ax^3+bx^2+cx+d$, se sabe que $M(-1, 11)$ es un máximo; que en $x=5$ alcanza un mínimo relativo y que el punto $P(1, -17)$ es de su gráfica. Hállense los coeficientes.

13. Descúbranse los puntos de inflexión de la gráfica de $y=\operatorname{sen} 3x$.

14. Dibújese la gráfica de la función $y=x\cdot e^x$. Luego, hállense el área del recinto limitado por la misma, el eje de abscisas y la recta paralela al eje de ordenadas, que contiene al mínimo de la curva.

15. Hágase el estudio de la función

$$y=\frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}$$

y dibújese su gráfica.

16. Estúdiense y represéntense las funciones

a) $y=\dfrac{x}{x^2+2}$;

b) $y=\dfrac{x-1}{x-2}$;

c) $y=2x^3-9x^2+12x-1$;

d) $y=x(4x^2+3x-18)$;

e) $y=e^{-x^2}$;

f) $y=x^2(3-2x)$.

17. Un triángulo isósceles gira sobre la mediatriz de su lado desigual, formando un cono. Si el perímetro del triángulo es de 30 m, ¿qué valor de la base hace que el volumen del cono sea máximo?

18. Calcúlese la longitud que ha de tener una cuerda de una circunferencia de radio 8 m para que al girar alrededor del diámetro paralelo a ella engendre una superficie de máxima área.

19. Determínese la ecuación de la recta que, pasando por $Q(2, 3)$, forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área máxima.

20. Las agujas de un reloj miden 2 y 3 cm. En cada situación, uniendo sus puntas, se forma un triángulo. Encuéntrese la fórmula del área de ese triángulo, en función del tiempo. Hállese qué hora, entre las 12 y las 12,30, marcará el reloj cuando esa área sea máxima.

21. ¿Qué puntos de la curva $y^2=4x$ están más cerca del punto $A(4, 0)$?

22. Calcúlense las dimensiones del paralelepípedo rectangular de mayor volumen de base cuadrada si su área total es 3 m^2.

23. Calcúlese el área limitada por la curva $y=3(2x^2-x^3)$ y el eje OX.

24. Una carretera forestal tiene la forma

$$y=\frac{1}{4}x^3-x^2+x,$$

siguiendo un torrente la dirección del eje de abscisas. ¿Qué valor tiene la tala de pinos comprendida entre los límites, si se supone un precio de 600 000 pesetas por Ha maderable? (x e y en km.)

25. Siendo $y=2x^2-1$, hállese el área del recinto limitado por la curva, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=5$.

26. Las parábolas $y=x^2-5$ e $y=3-x^2$ encierran un área. Hállese su valor.

27. Calcúlese el área que limita las gráficas de las funciones

$$y=2x \quad \text{e} \quad y=x^2-5x+6.$$

28. Hállese el momento de inercia de una barra homogénea de masa m y longitud l, respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos, perpendicular a ella.

29. La aceleración constante de un móvil es 3 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Sabiendo que en el quinto segundo de su trayectoria se halla parado y a 12 m del origen, determínese la ecuación de su movimiento.

30. ¿Qué trabajo realiza una fuerza, que varía en el tiempo según la ecuación $F=\ln t+t$, cuando traslada su punto de aplicación desde $s=1$ m a $s=10$ m, según la ecuación $s=\ln t$?

4.6

Autoevaluación A-4

1. Si a las funciones f y g, en el punto a, les sucede que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-g(a+h)}{h}=0$$

a) es que g es la recta tangente a f en a;
b) tienen en a una aproximación de orden 1;
c) son dos funciones tangentes en el infinito;
d) son derivables indefinidamente en a.

2. Si dos funciones presentan una tangencia de orden 1, en a,

a) ambas son continuas en a;
b) una, al menos, es continua en a;
c) una es lineal;
d) ambas están definidas en a.

3. Se sabe de f que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0.$$

Eso es

a) suficiente para asegurar que es derivable en a;
b) necesario para decir que es continua en a;
c) necesario y suficiente para decir que es continua en a;
d) señal de que $f(a)=0$.

4. Si la tangente a la gráfica de $f(x)$ en a es paralela al eje de abscisas,

a) la función tiene un máximo en a;
b) la función tiene un mínimo en a;
c) la función tiene un máximo o un mínimo en a;
d) la función puede tener un máximo o un mínimo en a.

5. En la expresión de la función diferencial $dy = f'(x)\,dx$,

a) aparecen dos variables;
b) dx es el número Δx;
c) debe decir $f'(a)$;
d) ha de indicarse el punto.

6. Como $f'(a) = 0$, la función $f(x)$

a) tiene un máximo en a;
b) tiene un mínimo en a;
c) tiene un máximo o un mínimo en a;
d) puede tener un máximo en a.

7. La función f en a cumple $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$. Por ello,

a) a es inflexión;
b) a es máximo o mínimo;
c) no se puede asegurar nada;
d) a no es inflexión.

8. La función f es tal que $f'(3) = 0$ y $f''(3) = e^{-1}$. Se puede asegurar que, en 3, f tiene

a) un máximo;
b) un mínimo;
c) una inflexión;
d) la exponencial no tiene ni máximos ni mínimos.

9. Si es cierto que f, en un $c \in [a, b]$, cumple que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es porque

a) la tangente en c es paralela a la cuerda de extremos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$;
b) f es continua en $[a, b]$, pero no derivable en (a, b);
c) f es derivable en $[a, b]$;
d) f es continua en $[a, b]$ y ello es suficiente para lo que se afirma.

10. Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), existe un punto $c \in (a, b)$, tal que

a) $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f(c)}{g(c)}$;

b) $g'(c)\,[f(b)-f(a)]=f'(c)\,[g(b)-g(a)]$;

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=0$;

d) $f'(c)=g'(c)$.

11. Las asíntotas oblicuas a una curva —si existen— son de la forma

a) $y=\left(\lim_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}\right)x+\lim_{x\to\infty}\left(y-\lim_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}\right)$;

b) $x=\lim_{x\to\infty}(y-mx)$;

c) $y=\lim_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}$;

d) $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

12. La función $y=x^4-x^2+2$ es simétrica respecto de

a) el origen;
b) el eje OY;
c) el eje OX;
d) las bisectrices de los cuadrantes.

13. De las funciones f y g se sabe que $\int f=\int g$. Entonces, la función $f-g$ puede ser

a) x^2;
b) x;
c) 7;
d) $1/2\,x^2+C$.

14. La aceleración de un móvil es $a=2t$. Entonces, la ecuación $s=f(t)$ es

a) de segundo grado;
b) de tercer grado;
c) lineal;
d) la aceleración es siempre una constante.

15. Sólo una de las cuatro columnas tiene todas sus expresiones correctas. Márquese.

a) $\int e^x\,dx=e^x+C$;

$\int a^x\,dx=a^x\cdot L_a e+C$;

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\text{arc sen}\,\dfrac{x}{a}+C$;

b) $\int e^x\,dx = e^x + C$;

$\int a^x\,dx = a^x \cdot \dfrac{1}{\ln a} + C$;

$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = -\operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a} + C$;

c) $\int \operatorname{tg} x\,dx = 1 + \operatorname{tg}^2 x + C$;

$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$;

d) $\int a^x\,dx = a^x \cdot L_a e + C$;

$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C;\ a \neq 0$;

$\int \operatorname{tg} x\,dx = \cos^{-2} x + C$.

16. La regla de Barrow dice que, si G es una primitiva de f en $[a, b]$

a) $\int_a^b f = A_a^b$;

b) $\int_a^b f = -\int_a^b f$;

c) $\int_a^b f = G(b) - G(a)$;

d) $\int_a^b G = f$.

17. $\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} A(f_n) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n = A(f)$

a) es la definición de integral definida de f en $[a, b]$;
b) es la regla de Barrow;
c) es el área determinada por la escalonada f_n;
d) es la expresión del teorema de Cauchy.

18. Si $\int_a^{-a} f(x)\,dx \neq 0$,

a) es seguro que $f(x) \neq f(-x)$;
b) $y = f(x)$ no es simétrica respecto del origen;
c) $f(x)$ es positiva en $[0, a]$;
d) $f(x)$ es negativa en $[0, a]$;

19. La derivada de la función $yx=1$ en $x=0$

a) es nula;
b) es infinita;
c) es la pendiente de la tangente a la curva en el origen;
d) no es derivable, por no estar definida en el punto.

20. La integral de $y=f(x)$, tiene por gráfica rectas paralelas al eje de abscisas. Por ello, esa función

a) era lineal;
b) se trataba de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes;
c) podría ser $y=7$;
b) es $y=0$.

21. Hállese una parábola de tipo $y=ax^2+bx+c$, que tenga tangencia de orden 2 con la curva $y=x^4-2x^3$, en el punto $x=1$.

22. Calcúlese la diferencial de $y=e^{-2x}$ en $x=1/2$.

23. Hállese $\Delta y-dy$, en $x=3$, para $\Delta x=0{,}01$, de la función $y=x^3$.

24. Calcúlese

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

25. Calcúlese

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

26. Estúdiese y represéntese la gráfica de la función

$$y=\frac{4x^2-9}{4x^2-1}.$$

27. Calcúlese la hipotenusa del triángulo rectángulo de mayor área, que tenga de suma de catetos 20 metros.

28. Intégrense:

a) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$; *b)* $\int \cos^3 x\,dx$.

29. Calcúlense, usando el cambio $e^x=t^2-1$ y la integración por partes, respectivamente,

a) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$; *b)* $\int_0^1 x\cdot e^x\,dx$.

30. Calcúlese el área del recinto limitado por la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ y la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

FICHA CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-4

1. *b).*	**6.** *d).*	**11.** *a).*	**16.** *c).*
2. *d).*	**7.** *c).*	**12.** *b).*	**17.** *a).*
3. *a).*	**8.** *b).*	**13.** *c).*	**18.** *b).*
4. *d).*	**9.** *a).*	**14.** *b).*	**19.** *d).*
5. *a).*	**10.** *b).*	**15.** *a).*	**20.** *d).*

21. Consúltese la solución del ejercicio 5.

22. Véase la solución de la tercera parte del ejercicio 7.

23. Compárese con el ejemplo 6.

24. Coincide con el ejemplo 10.

25. Está desarrollado en el ejemplo 11.

26. Es la función que se estudia en epígrafe 7 de 4.2.

27. Véase la solución del ejercicio 27.

28. Está resuelto en el ejemplo 24.

29. Véanse solución del ejercicio 43, *b)*, y ejemplo 30.

30. Coincide con la parte *b)* del ejemplo 37.

UNIDAD TEMATICA 5

ESTADISTICA

5.1. Distribuciones y poblaciones aleatorias

1. *Variable aleatoria*
2. *Distribuciones y poblaciones aleatorias*
3. *Distribuciones aleatorias: función de probabilidad y función de distribución*
4. *Momentos de una distribución*
5. *Distribución binomial*
   - 5.1. Establecimientos
   - 5.2. Momentos
   - 5.3. Ajuste de una distribución binomial a la distribución de una muestra
6. *Distribución normal*
   - 6.1. Establecimientos
   - 6.2. Tipificación de la variable. Tablas
   - 6.3. Distribución normal de un colectivo
   - 6.4. Ajuste de una distribución normal a la distribución de una muestra
7. *La distribución normal como aproximación de la binomial. Corrección de Yates*

5.2. Distribuciones bidimensionales

1. *Dependencia funcional y aleatoria*
2. *Tablas y gráficos*
3. *Regresión. Regresión lineal*

4. *Ajuste. Método de los mínimos cuadráticos*
5. *Cálculo abreviado de las rectas de regresión*
6. *Correlación*

5.3. Ejercicios y problemas de recapitulación

5.4. Autoevaluación A-5

5.1

Distribuciones y poblaciones aleatorias

1. VARIABLE ALEATORIA

Se denomina *variable aleatoria* a la variable que toma «valores», llamados *resultados,* dentro de un determinado dominio o *carácter,* con una determinada *probabilidad.*

Si el estudio de la variabilidad se lleva a cabo mediante experiencias que producen los sucesos cuyas *frecuencias* se asocian a los valores de la variable, ésta, en lugar de llamarse aleatoria, suele denominarse, con mayor propiedad, *variable estadística.*

La probabilidad asociada al «resultado 5» de la variable aleatoria «puntos conseguidos» al lanzar un dado homogéneo al aire y leer su cara superior en reposo es $p = 1/6$.

Ejercicio 1

En la variable estadística «talla de los soldados» en el conjunto de los cinco mil hombres de un cuartel, el resultado 1,72 *metros viene asociado a la frecuencia* $h = 0{,}065$. *¿Cuántas veces la variable estadística estudiada ha presentado este resultado?*

Las variables aleatorias y las estadísticas pueden ser *cualitativas* o *cuantitativas.* En el primer caso, los resultados que puedan aparecer en su *carácter* o *atributo* no son números y se les suele llamar *modalidades* o *rúbricas;* y

si son dos las modalidades que cubren el conjunto de resultados, la variable cualitativa recibe el nombre de *dicotómica* y, por extensión, el carácter se denomina *dicotómico.*

Ejercicio 2

Díganse cuáles de estas variables aleatorias o estadísticas son cualitativas y cuáles cuantitativas, indicando el carácter dicotómico de las que lo posean:

a) *Malformación fetal del cráneo producida por el gas «diosina», TCDD;*
b) *clasificación de mil talofitas del Amazonas;*
c) *peso de los nacidos, al cabo de un mes, en una maternidad.*

A su vez, una variable aleatoria cuantitativa puede ser *discreta* o *continua*, según que pueda tomar determinados valores o todos los «innumerables» de su dominio. Si la variación cuantitativa discreta se lleva a cabo de unidad en unidad, se dice entonces que se trata de un carácter aleatorio *merístico.*

Ejercicio 3

Califíquese la variable estadística «espesor del dieléctrico» de la fabricación en serie de un condensador.

La variable estadística cuantitativa discreta «número de hijos de todas las familias de un pueblo» es de carácter merístico, pues sus resultados se diferencian de unidad en unidad.

El cuadro de la figura 5.1 resume los términos que se vienen estableciendo.

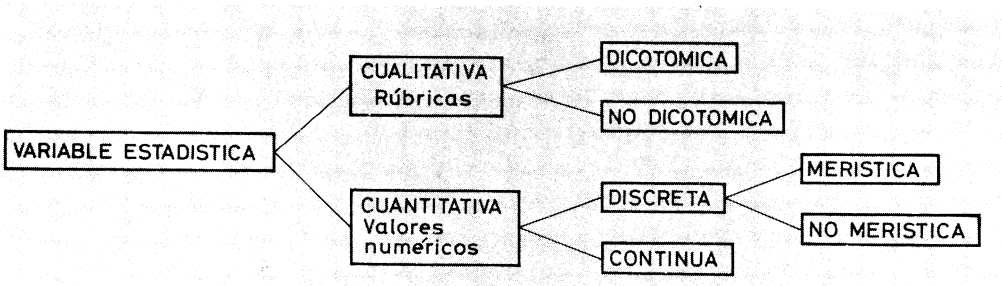


FIG. 5.1.

2. DISTRIBUCIONES Y POBLACIONES ALEATORIAS

Recordemos que, en Estadística, se denomina *población* al conjunto de individuos que poseen el carácter aleatorio que se estudia. Por extensión, frecuentemente, también recibe ese nombre el propio conjunto de resultados. Las poblaciones pueden ser finitas o infinitas.

Se llama *muestra* todo subconjunto de la población que se aísla para su estudio estadístico. Es necesario que estas muestras sean *aleatorias* y *representativas* de la población, como quedó dicho en cursos anteriores.

Escogida la muestra, se describe y luego la Estadística inferencial se encarga de sacar conclusiones para toda la población, de la que es subconjunto esa muestra.

Sin embargo, existen poblaciones naturales, tales que permiten su descripción sin necesidad de la inferencia a partir de muestras: son las llamadas *poblaciones aleatorias.*

Efectivamente, esas poblaciones aleatorias tienen la propiedad de que sus muestras presentan una distribución de frecuencias, tanto más parecidas a las llamadas *distribuciones aleatorias* cuanto más amplias se tomen. Resulta entonces que, con una aproximación suficiente, para describir una población aleatoria basta analizar la distribución aleatoria a la que se asemeja. Como estas distribuciones son modelos rigurosamente teóricos cuyo análisis se puede realizar completo, al margen de todo empirismo, quiere decirse que la descripción estadística de las llamadas poblaciones aleatorias queda reducida al simple tratamiento matemático de esas distribuciones aleatorias.

3. DISTRIBUCIONES ALEATORIAS: FUNCION DE PROBABILIDAD Y FUNCION DE DISTRIBUCION

Sea el espacio probabilístico $[\wp(H), p]$, formado sobre el muestral

$$H = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$$

Si a cada resultado se le asigna su probabilidad, queda establecida una función

$$\begin{aligned} \wp(H) &\xrightarrow{p} \mathfrak{R} \\ H_i &\longrightarrow p(H_i) = p_i \end{aligned} \qquad [1]$$

que se denomina *función de probabilidad.*

En el caso de tratarse de variables aleatorias continuas, la función de probabilidad recibe el nombre de *función de densidad.*

Por otra parte, se define la *función de distribución* como

$$\begin{aligned} \wp(H) &\xrightarrow{f} \mathfrak{R} \\ H_i &\longrightarrow f(H_i) = p(H \leqslant H_i) \end{aligned} \qquad [2]$$

de modo que en ella la imagen de cada resultado H_i es igual a la probabilidad de que se verifiquen todos los resultados menos o igual potentes que él.

Sea la categoría de pruebas «lanzar dos dados sobre la mesa y ver los puntos conseguidos en sus caras superiores en reposo».

El espacio muestral está constituido por los 36 resultados posibles:

$$H = \{(1, 1); (1, 2); \ldots; (1, 6); \ldots; (6, 6)\}$$

Se considera la función aleatoria que hace corresponder a cada suceso la suma de los puntos obtenidos. El conjunto de sus imágenes es

$$X = \{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$$

Sea ahora la función p sobre X, que asocia a cada resultado su probalilidad *a priori*. Su tabla de valores es:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Se ha establecido la función de probabilidad de la variable aleatoria estudiada. Su representación, por tratarse de una variación discreta, dará lugar a un diagrama de puntos, en lugar de una línea continua, lo que sucedería de ser la variable aleatoria cuantitativa continua, del mismo tipo, con su diagrama de densidad.

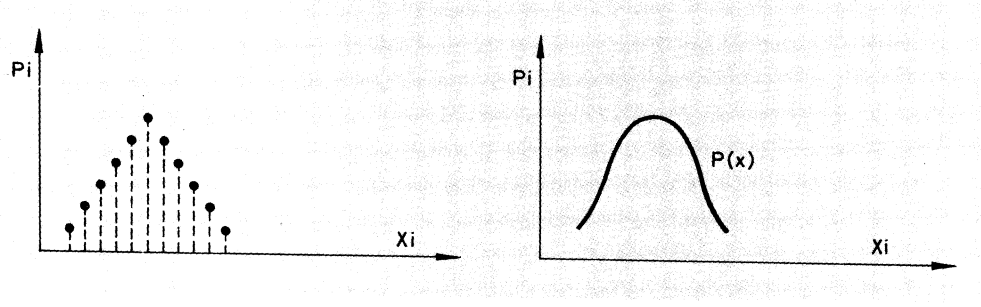


FIG. 5.2.

Ejercicio 4

Sea la categoría de pruebas «levantar una ficha de dominó y ver la suma de puntos conseguida», en las veintiocho de que consta ese juego. Hágase el

cuadro de valores y la representación de la función de probabilidad de la variable aleatoria propuesta.

Tratemos ahora de establecer la función de distribución de la variable aleatoria del ejemplo 3.

El cuadro de valores es:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1
ac.											

y su representación gráfica da lugar a un diagrama acumulativo cuya ordenada máxima, lógicamente, siempre es 1 (Fig. 5.3).

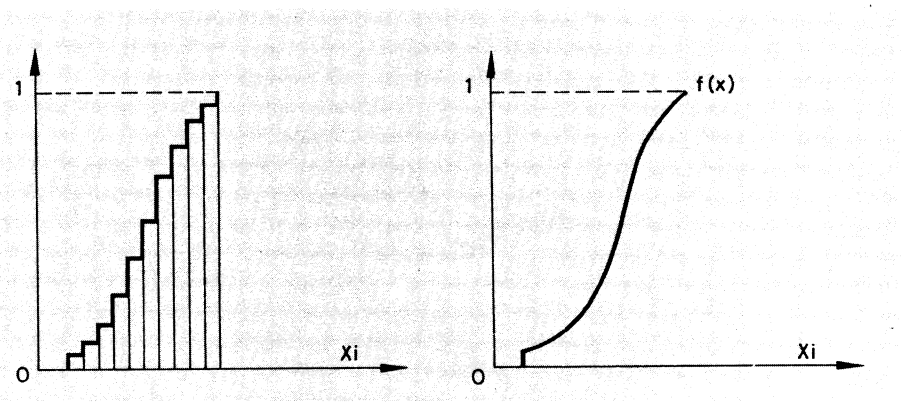


FIG. 5.3.

Ejercicio 5

Consígase el cuadro de valores y representación gráfica de la función de distribución de la variable aleatoria del ejercicio 4.

4. MOMENTOS DE UNA DISTRIBUCION

La función de distribución de una variable aleatoria queda determinada por un conjunto de magnitudes que reciben el nombre de *momentos*. De todos ellos citaremos aquí tres: la esperanza matemática, media o valor esperado; la varianza y la desviación típica de la distribución.

Media o esperanza matemática

Sea x una variable aleatoria discreta que toma los valores

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

con las probabilidades correspondientes

$$p_1, p_2, \ldots, p_k$$

Se llama media de la distribución, que denotamos μ, el concepto que describe la siguiente fórmula:

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i \qquad [3]$$

Intentando sensibilizar este momento, diremos que representa el valor que se puede esperar para la variable, como promedio de una elevada serie de ejecuciones.

Ejercicio 6

Calcúlense las esperanzas matemáticas o medias de las distribuciones de los ejemplos 3 y 4.

Ejercicio 7

Hállese la media de la distribución del ejercicio 4.

Varianza

Se establece como varianza de la distribución de una variable aleatoria discreta, denotada por σ^2, el momento que se formula:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i \qquad [4]$$

Desviación típica

En toda distribución aleatoria discreta, la desviación típica es igual a la raíz cuadrada positiva de su varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i} \qquad [5]$$

Ejercicio 8

Calcúlense la varianza y la desviación típica de la distribución del ejemplo 3.

5. DISTRIBUCION BINOMIAL

5.1. Establecimientos

Recibe el nombre de distribución binomial la que presenta una variable aleatoria de las siguientes características:

a) Sus clases son los resultados de la repetición indefinida de n pruebas aleatorias;
b) cada prueba puede dar lugar solamente a dos resultados posibles excluyentes;
c) Las probabilidades de esos dos resultados se mantienen constantes en todas las pruebas.

Se lanza un número indefinido de veces, n, una moneda trucada al aire, de modo que la probabilidad de conseguir cara es 1/4 y la de obtener cruz, 3/4, en cada una de las pruebas.

Esta variable aleatoria presenta distribución binomial *.

Sea X una variable aleatoria con distribución binomial. Según ello, en cada prueba digamos que se pueden producir dos sucesos excluyentes C ó E, cuyas probabilidades se conocen *a priori*, y son:

$$p(C)=p; \qquad p(E)=q.$$

de modo que

$$p+q=1$$

Entendemos que se llevan a cabo n pruebas. Las clases de sucesos posibles son:

$$H_n = n \text{ veces } C \text{ y } 0 \text{ veces } E$$
$$H_{n-1} = n-1 \text{ veces } C \text{ y } 1 \text{ vez } E$$
$$H_{n-2} = n-2 \text{ veces } C \text{ y } 2 \text{ veces } E$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_i = i \text{ veces } C \text{ y } n-i \text{ veces } E$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_0 = 0 \text{ veces } C \text{ y } n \text{ veces } E$$

* Tal como aparece en el enunciado, es una distribución binomial, ya que se escribe «un número ilimitado de veces, n». Sucede que realmente no es posible ejecutar el proceso ilimitadamente; pero, siendo n suficientemente grande, la aproximación es lícita.

Analicemos cómo están constituidos cada uno de esos sucesos, sobre el expresado, de modo general, H_i:

1. H_i se puede presentar de $\binom{n}{i}$ formas distintas, que son las combinaciones de las n pruebas, tomadas de i en i, posibles secuencias de la aparición del suceso C;
2. si se presenta una de esas formas de H_i no lo puede hacer simultáneamente otra de ellas, ya que son sucesos incompatibles;
3. cada una de esas formas, a su vez, está formada por la intersección de i sucesos C y $n-i$ sucesos E, independientes entre sí y, por tanto, la probabilidad de presentarse cada una de esas formas de realización de H_i es el producto de las probabilidades de los i sucesos C y los $n-i$ sucesos E que lo constituyen; es decir:

$$p\,(\text{forma}) = p^i \cdot q^{n-i};$$

4. como H_i está formado por la reunión de $\binom{n}{i}$ formas incompatibles y equiprobables, su probabilidad será la suma de las probabilidades de verificación de sus formas, de manera que

$$\boxed{p(H_i) = \binom{n}{i} p^i \cdot q^{n-i}} \qquad [6]$$

La expresión [6] define una distribución binomial como aquella que presenta la función de probabilidad recuadrada.

¿Cuál es la probabilidad de que al tirar seis veces al aire la moneda trucada del ejemplo 5 se obtengan dos caras?

$$p = 1/4; \quad q = 3/4$$

$$n = 6; \qquad i = 2 \qquad p\,(2 \text{ caras}) = \binom{6}{2} \cdot (1/4)^2 \cdot (3/4)^4 = 0{,}29$$

El rayado de la figura 5.4 representa el resultado obtenido.

Ejercicio 9

¿Qué probabilidad hay de obtener cinco cruces al lanzar seis veces la moneda de los ejemplos anteriores? Dibújese el diagrama correspondiente.

En la ecuación [6], i puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y n, ambos inclusive, de modo que la distribución presenta $n+1$ clases. Esta distribución se llama binomial porque su función de probabilidad, a lo largo de todo el espacio probabilístico, toma valores coincidentes con los términos del desarrollo del binomio de Newton $(p+q)^n$.

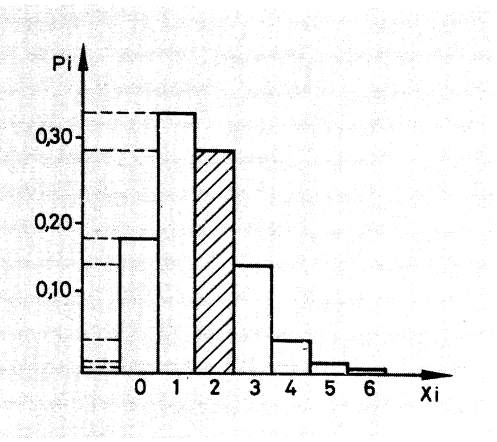


FIG. 5.4.

Cáigase en la cuenta de que, como $p+q=1$, entonces $(p+q)^n=1^n=1$. Efectivamente, la

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i\cdot q^{n-i}=1$$

que no es otra cosa que la probabilidad de todo el espacio muestral, a saber, el suceso seguro.

$$p(H)=1=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i\cdot q^{n-i} \qquad [7]$$

Son muy frecuentes las cuestiones en las que ha de trabajarse con la función de distribución en lugar de con la función de probabilidad. Recuérdese que aquélla, definida en [2], se refería a probabilidades acumuladas. El ejemplo siguiente pretende aclarar lo que se dice.

Admitiendo que el engendrar hijos varones o mujeres son sucesos equiprobables, ¿cuál es la probabilidad de encontrar entre todas las familias con seis hijos una que tenga dos, tres o cuatro varones?

El problema, obviamente, se refiere a una distribución binomial de las siguientes características:

$$A=(4v\cap 2m)\cup(3v\cap 3m)\cup(2v\cap 4m)$$
$$p=q=1/2$$
$$n=6$$

La probabilidad de A es la suma de las probabilidades de los tres sucesos reunidos, incompatibles, y, a su vez, formado cada uno de ellos por la intersección de los seis independientes y equiprobables que se indican dentro de cada paréntesis.

Así, la probabilidad de A viene dada por la suma de los tres términos del desarrollo binomial que se escribe:

$$p(A) = \sum_{i=2}^{i=4} \binom{6}{i} \cdot (1/2)^i \cdot (1/2)^{6-i} = 0{,}781$$

En el diagrama de la figura 5.5 aparece rayada el área correspondiente.

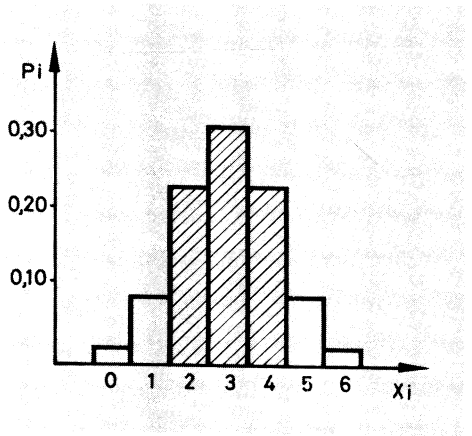


FIG. 5.5.

Ejercicio 10

¿Qué probabilidad hay de encontrar entre todas las familias con seis hijos, una que tenga, al menos, cuatro varones?

Con el fin de evitar largos cálculos, se han construido tablas que dan, para distintos valores de n, p y q, los valores de los términos del desarrollo del binomio.

Usando las tablas, calcúlese el resultado del ejercicio 10.

$$\binom{6}{4} \cdot (1/2)^4 \cdot (1/2)^2 \quad \text{se lee} \ldots \quad 0{,}2344$$

$$\binom{6}{5} \cdot (1/2)^5 \cdot (1/2)^1 \quad \text{se lee} \ldots \quad 0{,}0938$$

$$\frac{\binom{6}{6}\cdot(1/2)^6\cdot(1/2)^0 \quad \text{se lee} \ldots \quad 0{,}0156}{\sum_{i=4}^{i=6}\binom{6}{i}\cdot(1/2)^i\cdot(1/2)^{6-i}=\ldots=0{,}3438}$$

Distribución binomial

Valores hasta $n=10$ de $\binom{n}{i}p^i\cdot(1-p)^{n-i}$, para distintos valores de p

		p									
n	i	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,7100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0071	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1868	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0702	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL *(cont.)*

Valores hasta $n=10$ de $\binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i}$, para distintos valores de p

		p									
n	i	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1002	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2065	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0403	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389					
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087					
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

Ejercicio 11

La probabilidad de conseguir un suceso A es $p=0,2$. ¿Qué probabilidad hay de que se verifique no menos de cuatro y no más de siete veces, en diez pruebas consecutivas?

5.2. Momentos

Media

Según [3], la esperanza matemática o media de una distribución aleatoria es

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

Basta sustituir en ella los límites específicos de la distribución discreta binomial, así como adaptar la simbología, para obtener

$$\mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i} \qquad [8]$$

Ejercicio 12

Desarrollando el número combinatorio de [8] *y advirtiendo que, a efectos de cálculo, el símbolo* x_i *y el* i *producen los mismos números, compruébese que el valor de la media en una distribución binomial es*

$$\mu = n \cdot p. \qquad [9]$$

Varianza y desviación típica

A partir de la ecuación [4] se calcula que la varianza para una distribución binomial es

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \qquad [10]$$

resultando, entonces, para la desviación típica la expresión

$$\sigma = + \sqrt{n \cdot p \cdot q} \qquad [11]$$

Ejercicio 13

Calcúlense la media, varianza y desviación típica de la distribución binomial del ejemplo 7.

5.3. Ajuste de una distribución binomial a la distribución de una muestra

Entendamos que para estudiar el comportamiento de una variable aleatoria se han realizado un elevado número de observaciones, registrando las frecuencias asociadas a los resultados obtenidos, apreciándose un notable parecido con una distribución binomial.

Si se quiere ajustar a esa población aleatoria de resultados una distribución binomial, han de hallarse las probabilidades teóricas, p y q, de ese tipo de distribución que mejor describa la población aleatoria estudiada.

En 100 cultivos bacteriológicos en los que se pretende controlar la posible coexistencia de cinco clases de bacterias, se han conseguidos estos resultados:

Número de clases de bacterias:	x_i	0	1	2	3	4	5
Número de cultivos:	n_i	0	8	21	32	31	8

Hágase el ajuste de esta muestra a una distribución binomial.

La media de las observaciones es

$$\bar{x}=\frac{1}{N}x_i n_i=3{,}10.$$

Como la media de una distribución binomial es $\mu=n\cdot p$, se exige que:

$$3{,}10=n\cdot p=5\cdot p$$
$$p=0{,}62$$
$$q=0{,}38$$

Con estos números, la distribución binomial buscada es:

$$1=\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}0{,}62^i\,0{,}38^{5-i}$$

En la tabla que sigue se disponen los valores reales y los producidos por la distribución binomial ajustada, pudiéndose apreciar la suficiente aproximación del ajuste.

x_i	n_i	h_i	$\binom{5}{i}0{,}62^i\cdot 0{,}38^{5-i}$	
0	0	0	0,008	0,8 %
1	8	0,8	0,070	7,0 %
2	21	0,21	0,210	21,0 %
3	32	0,32	0,349	34,9 %
4	31	0,31	0,271	27,7 %
5	8	0,08	0,092	9,2 %
100	1	1,00	1,000	100,0

Ejercicio 14

Al verificar la calidad de producción de una serie de 2 000 piezas, las cuales llevan tres soldaduras cada una, se han encontrado los siguientes defectos:

Número de piezas:	x_i	0	1	2	3
Número de soldaduras defectuosas:	n_i	844	840	281	35

Establézcase la distribución binomial ajustada a los datos reseñados y dígase qué número de piezas defectuosas de cada clase cabe esperar en las series de producción.

6. DISTRIBUCION NORMAL

6.1. Establecimientos

En 1773, DE MOIVRE estableció la función de probabilidad que hoy se conoce con el nombre de distribución normal y cuya representación gráfica es la conocida «curva de Gauss o de campana».

Si en una distribución binomial sucede que p y q son números no muy diferentes, que $n \cdot p \geqslant 5$ y que la x_i aumenta ilimitadamente, al tiempo que lo hace n, resulta que su polígono de frecuencias es «suficientemente» parecido a la curva normal, cuya expresión analítica es

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad [12]$$

en la que σ y μ son la desviación típica y la media de la distribución.

Lo dicho queda de manifiesto en la figura 5.6.

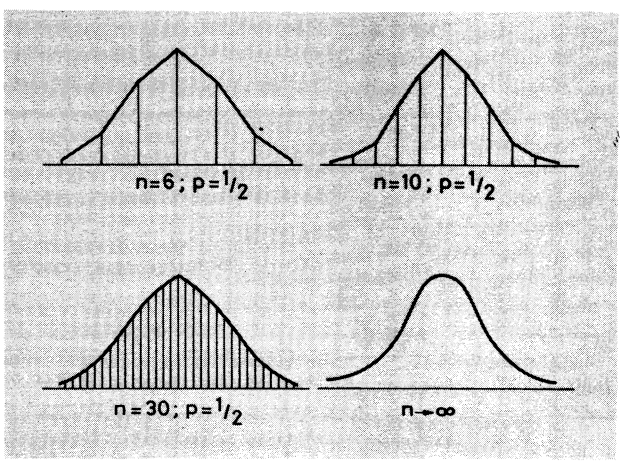


FIG. 5.6.

Es frecuente denotar simbólicamente una distribución normal de media μ y desviación típica σ escribiendo $N(\mu, \sigma)$.

La curva normal presenta las siguientes características, como puede apreciarse en las gráficas de dos distribuciones normales de media común, $\mu = 2$, y desviaciones típicas $\sigma_A = 3$ y $\sigma_B = 1, 2$, que se representan en la figura 5.7.

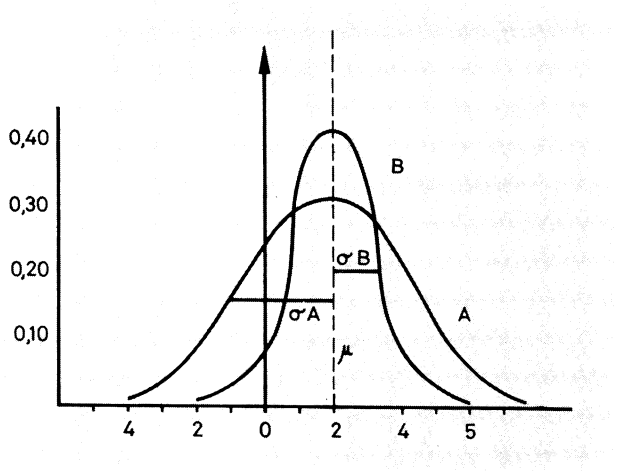


FIG. 5.7.

1. Las clases de distribución son puntuales y, por tanto, infinitas, como lo es n.
2. La curva normal es doblemente asintótica con el eje de abscisas.
3. El intervalo total o recorrido de la variable es limitado.
4. La función posee un máximo que se corresponde con los valores coincidentes de la moda, mediana y media.
5. La curva es simétrica, respecto de la ordenada del máximo.
6. La función posee dos puntos de inflexión simétricos, respecto de la ordenada media.
7. La desviación típica viene medida por el segmento $x_I - x_\mu$, diferencia de abscisas de una inflexión y la media.
8. Su coeficiente de asimetría es nulo, como corresponde a la forma de la curva.

Como consecuencia de 1, adviértase que no tiene sentido alguno asignar a la ordenada de un punto el significado de probabilidad de esa clase puntual. En una distribución normal sólo es posible determinar probabilidades de intervalos de valores de la variable aleatoria, y vienen representadas por las áreas parciales, encerradas por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas levantadas por los límites del intervalo considerado.

La función de densidad $f(x)$ no representa probabilidades, pero el producto $f(x) \cdot \Delta x$ resulta ser aproximadamente igual a la probabilidad de que la variable tome un valor del intervalo $(x, x + \Delta x)$, de modo que se establece:

$$p(a \leqslant x_i \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx \qquad [13]$$

6.2. Tipificación de la variable. Tablas

Sea la distribución normal $N(\mu, \sigma)$, que se representa en la figura 5.8 (*a*).

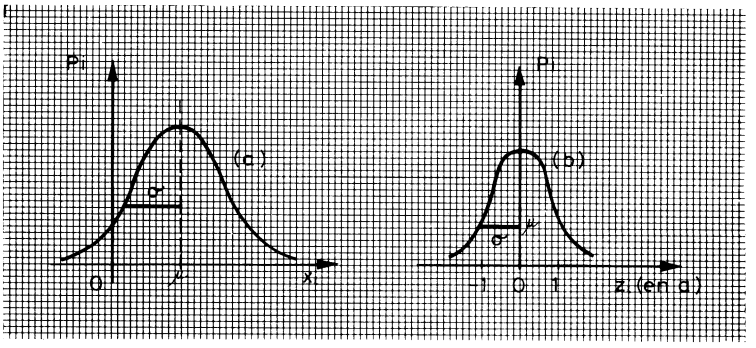


FIG. 5.8.

Si en [12] se realiza el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

se obtiene una forma de la ecuación muy cómoda, referible a una distribución normal $N(0, 1)$, de media nula y desviación típica unidad, cuya gráfica se dibuja en la parte (*b*) de la figura 5.8.

De este modo, la ecuación [12] toma la forma más simple

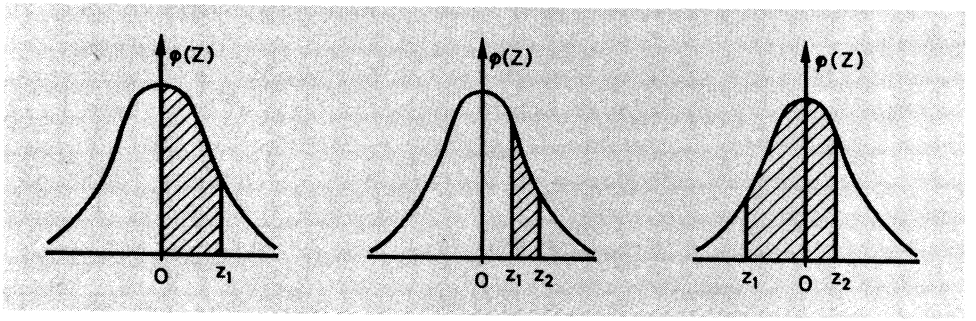
$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad [14]$$

Una distribución tipificada ya no aparece descrita en milímetros, gramos o cualquiera otra unidad en la que lo estuviera la distribución primitiva, sino que está descrita en desviaciones de cada valor a la media, medidas en desviaciones típicas. Consecuencia inmediata de ello es que si la desviación típica de la distribución primitiva fuera menor que la unidad, entonces la tipificación presenta una distribución más dispersa; y más agrupada alrededor de la media, en caso contrario.

Con el fin de evitar los engorrosos cálculos para la determinación de esas áreas limitadas por la curva normal, que fijan las probabilidades de que la variable tome un valor en un determinado intervalo, se han construido tablas que coleccionan valores de esas áreas para un buen número de valores de la tipificada z. De este modo, una sencilla resta entre los valores tabulados consigue la probabilidad del intervalo buscado.

Efectivamente, los cálculos de las probabilidades representadas en cada uno de los dibujos de la figura 5.9 son los que van a sus pies.

Ejemplo 10



$p(0 \leqslant z \leqslant z_1) = Z_1$

$p(z_1 \leqslant z \leqslant z_2) = p(0 \leqslant z \leqslant z_2) - p(0 \leqslant z \leqslant z_1) = Z_2 - Z_1$

$p(z_1 \leqslant z \leqslant z_2) = p(0 \leqslant z \leqslant z_2) + p(0 \leqslant z \leqslant z_1) = Z_2 + Z_1$

FIG. 5.9.

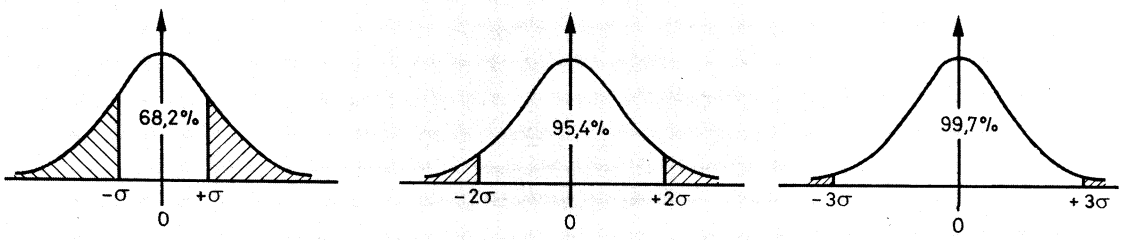
Ejercicio 15

En una distribución $N(50, 5)$, *determínese la probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre* 32 *y* 40.

6.3. Distribución normal de un colectivo

Como sucede en todo diagrama de densidad, el área limitada por la curva normal y el eje de abscisas vale la unidad.

Conviene saber cómo se distribuyen los individuos en función de la desviación típica y, en consecuencia, qué áreas parciales representan las probabilidades de los intervalos de distribución. En toda población o muestra que presente distribución normal sus individuos se reparten como se indica:



El 68,2 por 100 de los individuos están comprendidos en $(-\sigma, +\sigma)$.

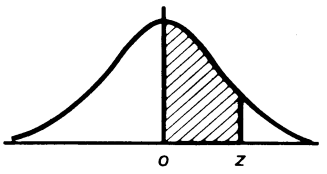
El 95,4 por 100 de los individuos están comprendidos en $(-2\sigma, +2\sigma)$.

El 99,7 por 100 de los individuos están comprendidos en $(-3\sigma, +3\sigma)$.

FIG. 5.10.

Areas limitadas en una curva normal tipificada entre el eje de las ordenadas y las ordenadas levantadas por distintos valores de *z*.

(De *Statistic*, por M. R. SPIEGEL. Schaum Publishing Company. Nueva York, 1961.)



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1592	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4039	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Ejercicio 16

En un curso de 220 *alumnos, una prueba objetiva de* 40 *ítems ha dado de media de aciertos* $\bar{x}=22$, *y la desviación típica de la distribución ha resultado ser* $\sigma=6{,}8$. *Admitiendo que la distribución es normal y usando las categorías de evaluación* Muy deficiente, Insuficiente, Suficiente, Bien, Notable y Sobresaliente, *dígase:*

a) *cuántos alumnos no han resultado suficientes;*

b) *la calificación que le corresponde a un alumno que consiguió* 27 *aciertos.*

6.4. Ajuste de una distribución normal a la distribución de una muestra

Cuando el histograma de una distribución de frecuencias agrupadas presenta una forma aproximadamente normal, puede ajustarse a un distribución de este tipo, asignando los valores de su media y desviación típica a la μ y σ de la distribución normal que se pretende.

De esta manera pueden calcularse las probabilidades normales correspondientes a los intervalos de clase de las frecuencias agrupadas.

El departamento de verificación de una factoría de aparatos eléctricos toma para control de calidad 500 piezas de un determinado diseño y mide su espesor en milímetros, habiendo resultado los siguientes números, agrupados en once clases (atiéndase solamente a las tres primeras columnas de la tabla).

Clase x_k-x_{k+1}	*Marca de clase* (x_i)	*Frecuencia* (n_i)	*Desviaciones,* $x-\bar{x}$	$\frac{x-\bar{x}}{\sigma}$	*Area* z %	Δz	n_i teór.
1,725-1,775	1,75	5	−0,275	−2,75	49,70	0,92	4,6
1,775-1,825	1,80	25	−0,225	−2,25	48,78	2,79	13,95
1,825-1,875	1,85	35	−0,175	−1,75	45,99	6,55	32,75
1,875-1,925	1,90	55	−0,125	−1,25	39,44	12,10	60,50
1,925-1,975	1,95	79	−0,075	−0,75	27,34	71,47	87,35
1,975-2,025	2,00	100	−0,025	−0,25	9,87	19,74	98,70
			0,025	0,25	9,87		
2,025-2,075	2,05	85	0,075	0,75	27,34	17,47	87,35
2,075-2,125	2,10	50	0,125	1,25	39,44	12,10	60,50
2,125-2,175	2,15	45	0,175	1,75	45,99	6,55	32,75
2,175-2,225	2,20	11	0,225	2,25	48,78	2,79	13,95
2,225-2,275	2,25	10	0,275	2,75	49,70	0,92	4,6
		$\Sigma n_i=500$				$\Sigma\Delta z=99{,}7$	$\Sigma n=498{,}5$

$\bar{x}=2{,}00$; $\sigma=0{,}100$; $N=500$.

Para calcular las frecuencias teóricas de la distribución normal ajustada se trabaja del siguiente modo:

1. La cuarta columna colecciona las distancias desde el extremo más alejado de la clase a la media. Así,

   en la segunda fila: $1{,}775 - 2{,}00 = -0{,}225$;
   en la octava fila: $2{,}125 - 2{,}00 = 0{,}125$.

   La clase central tendrá dos distancias, a izquierda y derecha de la media.
2. En la quinta columna se tipifica a z_i las x_i, dividiendo las diferencias por σ.
3. En la sexta columna se disponen, en tantos por ciento, las lecturas de la tabla de áreas, correspondientes a los números de la anterior columna.
4. En la siguiente columna se registran las áreas correspondientes a cada uno de los intervalos de clase, calculadas por diferencia de cada una a la siguiente, o al revés, según que el intervalo se encuentre a derecha o a izquierda de la media. Así,

   en la segunda fila: $48{,}78 - 45{,}99 = 2{,}79$;
   en la novena fila: $45{,}99 - 39{,}44 = 6{,}55$.

5. Finalmente, en la columna octava se tabulan las frecuencias teóricas buscadas, correspondientes a las de cada una de las clases de la distribución original. Por ejemplo, en la novena fila,

$$\frac{6{,}55 \times N}{100} = 32{,}75$$

Con los números de esta última columna se está en disposición de, fijadas las ordenadas, dibujar por aproximación la curva normal correspondiente.

7. LA DISTRIBUCION NORMAL COMO APROXIMACION DE LA BINOMIAL. CORRECCION DE YATES

Si en una distribución binomial p o q no son demasiado próximos a cero y son tales que $n \cdot p \geqslant 5$, $n \cdot q \geqslant 5$, con n suficientemente grande, las áreas limitadas por su histograma de frecuencias son sensiblemente coincidentes con las que determina la curva de campana de la distribución normal asociada a ella.

Si esto es sí, en lugar de sumar las áreas dadas por el cálculo del binomio se pueden computar aproximadamente por las tabuladas para la distribución normal correspondiente. En efecto, el ejemplo que sigue especifica la técnica, aproximación y correcciones.

Ejemplo 12

¿Qué probabilidad hay de extraer una muestra de 10 bolas, formada por 3, 4 ó 5 negras y las restantes blancas, de una urna que contiene 1 000 bolas blancas y 1 000 bolas negras?

La probabilidad de obtener bola negra es $p=1/2$ y la probabilidad de conseguir bola blanca es $q=1/2$, de modo que la distribución binomial da:

$$p(A)=\sum_{i=3}^{i=5}\binom{10}{i}\cdot(1/2)^i\cdot(1/2)^{10-i}$$

$$p(A)=0{,}56835$$

Si se considera la distribución como normal, ha de adecuarse la variación discreta de la variable a la continuidad de la variación normal. Por eso, los valores discretos 5 y 3 del carácter «número de bolas negras» ha de corregirse a los valores medios de sus correspondientes rectángulos del histograma, dando 5,5 y 2,5. Es la llamada *corrección de Yates.*

Se procede ahora a la tipificación de la variable:

$$x_1=2{,}5 \implies z_1=\frac{2{,}5-\mu}{\sigma}=-1{,}57;$$

$$x_2=5{,}5 \implies z_2=\frac{5{,}5-\mu}{\sigma}=0{,}31,$$

siendo $\mu=n\cdot p=5$ y $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=1{,}58$.

Se dispone la lectura sobre las tablas de áreas

$$p(3\leqslant x_i\leqslant 5)=p(-1{,}57\leqslant z_i\leqslant 0{,}31)=p(0\leqslant z_i\leqslant 1{,}57)+p(0\leqslant z_i\leqslant 0{,}31);$$

resultando:

$$p(A)=0{,}4418+0{,}1217=0{,}5635$$

Si se comparan los resultados habidos por el cálculo binomial y el normal se observará una aproximación razonable, en la mayoría de los casos válida.

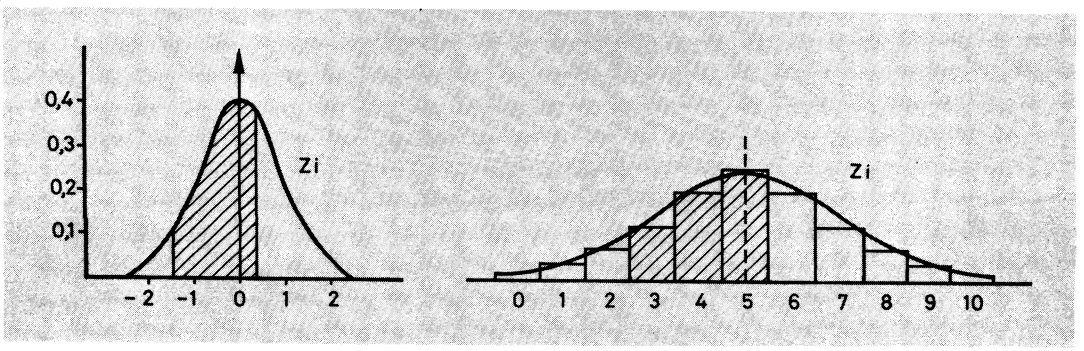


FIG. 5.11.

La figura 5.11 facilita la interpretación gráfica de esta aproximación.

El valor de n en el ejemplo es 10. La aproximación resulta tanto más fina cuanto más elevado sea n.

Ejercicio 17

La probabilidad de que se verifique un cierto suceso es $p=0{,}6$. *¿Cuál es la probabilidad de conseguir* 4 *ó* 5 *éxitos en* 10 *pruebas?*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5.1

1. $h=0{,}065=\dfrac{n}{5\,000} \Longrightarrow n=325$ veces.

2. *a)* Es una variable estadística cualitativa dicotómica. Durante la guerra del Vietnam, el doctor Yabir pudo observar que ese derivado del triclorofenol afectaba a los fetos de las madres gestantes de dos modos, por lo que se refiere al tamaño del cráneo: braquicefalia y macrocefalia.

b) Variable estadística cualitativa con tres rúbricas: alga, hongo y líquen.

3. Se trata de una variable cuantitativa continua, pues, teóricamente, puede tomar cualquier valor del intervalo de extremos mayor y menor conseguidos.

4.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/28	1/28	2/28	2/28	3/28	3/28	4/28	3/28	3/28	2/28	2/28	1/28	1/28

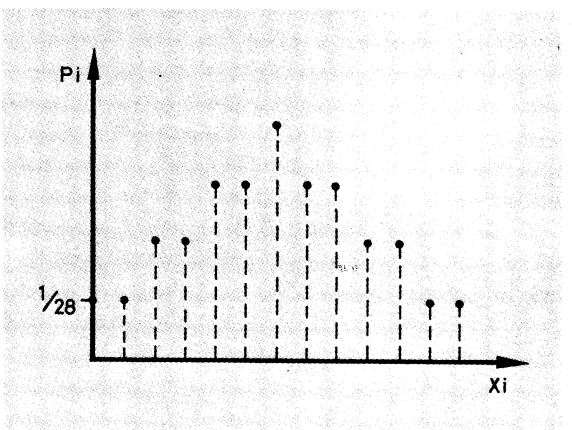


FIG. 5.12.

5.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i ac.	1/28	2/28	4/28	6/28	9/28	12/28	16/28	19/28	22/28	24/28	26/28	27/28	1

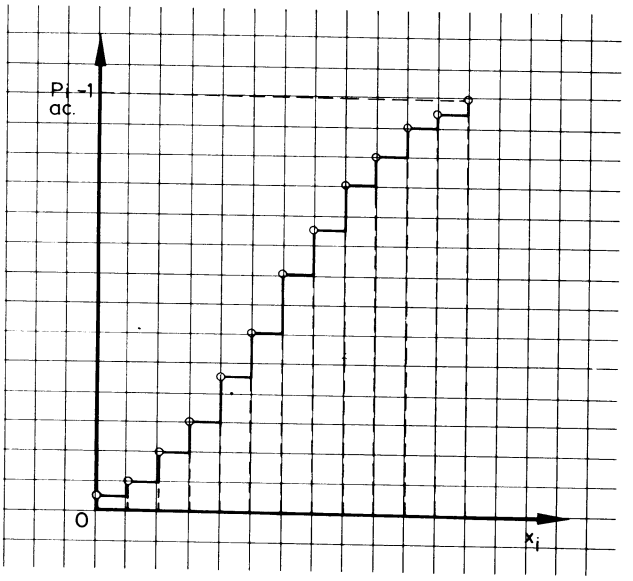


FIG. 5.13.

6. $\mu = 2 \cdot 1/36 + 3 \cdot 2/36 + 4 \cdot 3/36 + \ldots + 12 \cdot 1/36 = 7$.

7. $\mu = 6$.

8. $\sigma^2 = 35/6$; $\sigma = +\sqrt{35/6}$.

9. $i = 6 - 5 = 1$; $p\,(5 \text{ cruces}) = \binom{6}{1} \cdot (1/4)^1 \cdot (3/4)^5 = 0{,}353$.

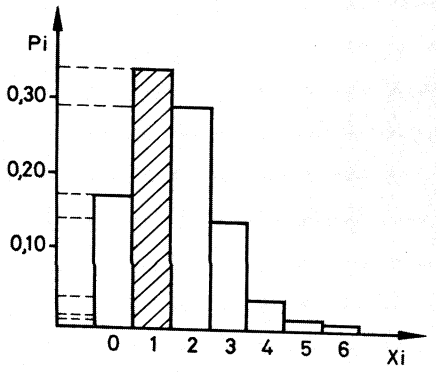


FIG. 5.14.

10. $A=(6v\cap 0m)\cup(5v\cap 1m)\cup(4v\cap 2m)$

$$p(A)=\sum_{i=4}^{i=6}\binom{6}{i}\cdot(1/2)^i\cdot(1/2)^{6-i}=0{,}345.$$

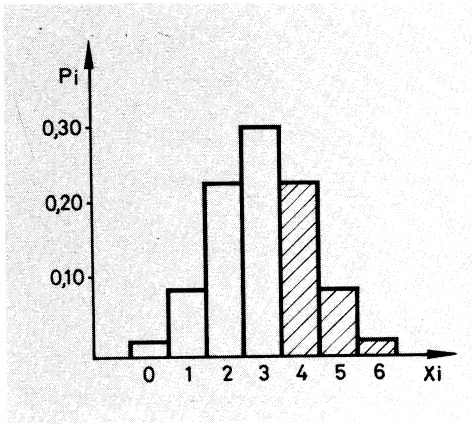


FIG. 5.15.

11. $p=\sum_{i=4}^{i=7}\binom{10}{i}0{,}2^i\cdot 0{,}8^{10-i}=0{,}0881+0{,}0264+0{,}0055+0{,}0008=0{,}1208.$

12. $\mu=\sum_{i=0}^{n}x_i\binom{n}{i}p^i\cdot q^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}i\cdot\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\cdot p^i\cdot q^{n-i}=$

$=0+\binom{n}{1}p\cdot q^{n-1}+2\cdot\binom{n}{2}p^2\cdot q^{n-2}+3\cdot\binom{n}{3}p^3\cdot q^{n-3}+\ldots=$

$=n\cdot p\cdot q^{n-1}+2\cdot\frac{n!}{2\cdot(n-2)!}\cdot p^2\cdot q^{n-2}+3\cdot\frac{n!}{6\cdot(n-3)!}\cdot p^3\cdot q^{n-3}+\ldots=$

$=n\cdot p\cdot\left(q^{n-1}+\frac{2(n-1)!}{2(n-2)!}\cdot p^1\cdot q^{n-2}+3\cdot\frac{(n-1)!}{6(n-3)!}\cdot p^2\cdot q^{n-3}+\ldots\right)=$

$=n\cdot p\cdot\left[\binom{n-1}{0}p^0q^{n-1}+\binom{n-1}{1}p^1q^{n-2}+\binom{n-1}{2}p^2q^{n-3}+\ldots\right]=$

$=n\cdot p\cdot(p+q)^{n-1}=n\cdot p\cdot 1=n\cdot p.$

13. $\mu=6\cdot 1/2=3;\quad \sigma^2=6\cdot 1/2\cdot 1/2=3/2;\quad \sigma=+\sqrt{3/2}.$

14. $\bar{x}=\frac{1}{N}\Sigma x_i n_i=0{,}7535.$

$0{,}7535=n\cdot p=3\cdot p\implies 0{,}25;$

$q=0{,}75;$

$1=\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}0{,}25^i\cdot 0{,}75^{3-i}.$

Defectos x_i	*Probabilidad* p_i	*Número de piezas defectuosas* $p_i \cdot N$	
0	0,4219	843,8	42,2%
1	0,4219	843,8	42,2%
2	0,1406	281,2	14,0%
3	0,0156	312	1,6%

15. Primero habrá de tipificarse la variable x:

$$z = \frac{x - 50}{5}$$

$x_1 = 32 \Longrightarrow z_1 = -3{,}6$

$x_2 = 40 \Longrightarrow z_2 = -2$

$p(32 \leqslant x \leqslant 40) = p(-3{,}6 \leqslant z \leqslant -2) = p(-3{,}6 \leqslant z \leqslant 0) - p(-2 \leqslant z \leqslant 0) =$

$= 0{,}4998 - 0{,}4772 = 0{,}0226.$

16.

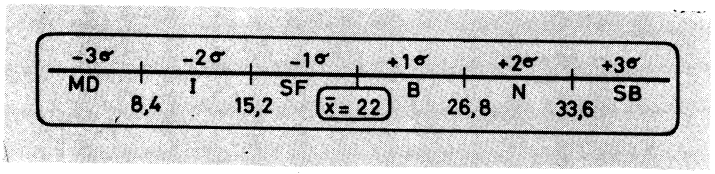


FIG. 5.16.

a) $\dfrac{0{,}318}{2} \cdot 220 = 35$ alumnos no suficientes;

b) a 27 aciertos le corresponde la categoría de notable.

17. $\mu = n \cdot p = 10 \times 0{,}6 = 6$;

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 10 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 1{,}54$

$x_1 = 3{,}5 \Longrightarrow z_1 = \dfrac{3{,}5 - 6}{1{,}54} = -1{,}62$

$x_2 = 5{,}5 \Longrightarrow z_2 = \dfrac{5{,}5 - 6}{1{,}54} = -0{,}32$

$p(4 \leqslant x_i \leqslant 5) = p(-1{,}62 \leqslant z_i \leqslant -0{,}32) =$

$= p(0 \leqslant z \leqslant 1{,}62) - p(0 \leqslant z \leqslant 0{,}32) =$

$= 0{,}4474 - 0{,}1255 = 0{,}3219$

5.2

Distribuciones bidimensionales

1. DEPENDENCIA FUNCIONAL Y ALEATORIA

Considérese un circuito de corriente continua en cuyos extremos se mantiene constante una determinada diferencia de potencial de V voltios, mientras que, por medio de un reóstato, se hace variar la resistencia eléctrica.

A medida que se varía la resistencia R, la intensidad I, que atraviesa el circuito, también lo hace, obedeciendo a la conocida ley de Ohm que exige que

$$R \cdot I = V \text{ (constante, en nuestro caso)} \qquad [15]$$

Existe una rigurosa *dependencia funcional* o analítica entre las dos variables, R e I: fijada una resistencia de R ohmios, la corriente toma «necesariamente» una determinada intensidad de I_1 amperios; si es R_2 la resistencia, entonces la intensidad será un número fijo I_2, de modo que

$$R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 = V, \text{ constante};$$

y, en general,

$$R_i \cdot I_i = V, \text{ constante} = k$$

Si se disponen unos ejes cartesianos para representar el fenómeno, registrando resistencias en abscisas e intensidades en ordenadas, cada estado de corriente vendrá representado por un punto del plano: por el punto (R_i, I_i). Se consigue así una bien conocida línea: una rama de hipérbola equilátera, que es la representación gráfica de la función analítica $R \cdot I = k$, en la que sus variables presentan *dependencia funcional.*

V constante = 120 voltios.

R	12	15	20	24	30	40	60	ohmios
I	10	8	6	5	4	3	2	amperios

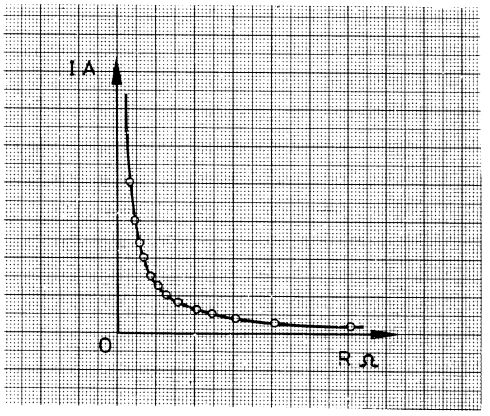


FIG. 5.17.

Existen multitud de fenómenos en la Naturaleza, de todo tipo, que no admiten el tratamiento matemático anterior, pero que vienen fijados por dos variables, de alguna manera dependientes entre sí. Tal sería el caso, por ejemplo, de las alturas alcanzadas por los hijos, h_f, en función de la altura de los padres, h_p. Ciertamente, a padres altos les suelen corresponder hijos también de elevada estatura, y viceversa; pero lo que no sucede es que dada una determinada talla de la generación paterna exista una altura perfectamente determinda para la filial.

Claro es que ambas estaturas dependerán de alguna manera entre sí, pero con una dependencia mucho menos «robusta» que la funcional; se dice que presentan *dependencia aleatoria.*

Por analogía con el lenguaje analítico, establecemos la función aleatoria

$$f(h_p, h_f) = 0$$

y diremos que se trata de una *variable aleatoria bidimensional.*

En las distribuciones estadísticas de variables dimensionales, cada individuo de la muestra viene caracterizado por un par de números, que son los valores que toman las variables en cada caso.

El modo más simple de representación de una distribución estadística bidimensional viene sugerido por la representación cartesiana de las funciones analíticas. Como allí, se disponen unos ejes de cordenadas ortogonales y sobre el eje de abscisas se representan los valores de una de las variables, y, sobre el de ordenadas, los de la otra. De este modo cada individuo de la muestra queda representado por un punto del plano.

Esta manera de representación recibe el nombre de *nube de puntos* o *diagrama de dispersión.*

De un modo intuitivo, y en espera de mayor precisión, cabe observar ahora que si la nube de puntos se constriñe mucho y éstos aparecen agrupados alrededor de una posible línea representativa, es señal de que la dependencia aleatoria entre las dos variables es bastante fuerte; mientras que si el diagrama de puntos resulta ser muy disperso, y de ninguna manera sugiere una posible línea representativa del fenómeno, ello es debido a que la dependencia entre las dos variables estadísticas representadas es muy débil. Como casos extremos, entiéndase que si la nube de puntos cubre todo el plano, en dispersión total, la presunta dependencia aleatoria no existe; y que si, por el contrario, al representar una distribución estadística bivariante se obtiene un diagrama de puntos, formado por todos los que están sobre una determinada línea, la dependencia deja de ser aleatoria para ser funcional.

La figura 5.18 representa los diagramas de puntos de cinco muestras bidimensionales imaginarias.

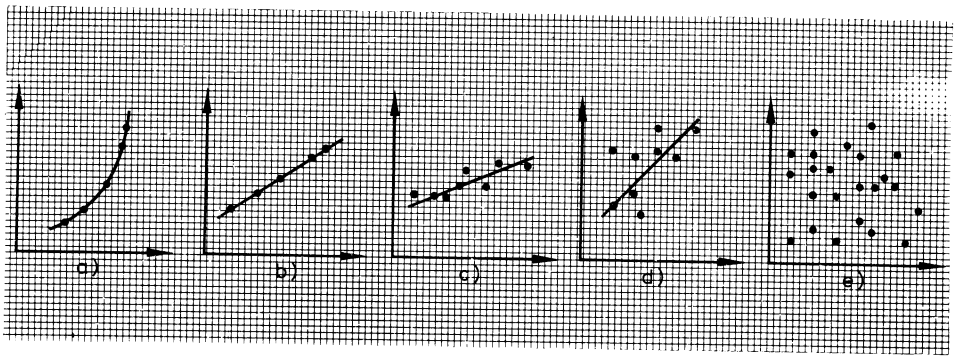


FIG. 5.18.

Dependencia funcional: { parabólica (*a*) / lineal (*b*)

Dependencia aleatoria: { fuerte (*c*) / débil (*d*)

Independencia aleatoria: (*e*).

2. TABLAS Y GRAFICOS

Ya queda apuntada la forma más simple de representación de una distribución aleatoria bivariante: el diagrama de puntos.

La tabulación de datos de una variable estadística bidimensional se realiza mediante una tabla de doble entrada. En cada un de las cuadrículas de esas tablas se registran las frecuencias absolutas de cada una de las clases bidimensionales. Así, si en una de ellas aparece el número n_{ij}, se quiere indicar que existen n_{ij} individuos cuyo carácter bidimensional es (i, j); es decir, que hay ese número de individuos con un valor i de la variable X y con un valor j de la variable Y.

Ejemplo 14

En 100 partos de madres diabéticas se ha determinado el factor k de la madre y el Z del recién nacido. Codificados los resultados a números relativos y hecho el recuento, he aquí la tabla de resultados:

Factor Z \ Factor k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	Σn
-2	1	2	2								5
-1		3	8	9							20
0			1	10	32	10	5		2		60
1				1	1	6	2				10
2						1	3			1	5
$\Sigma n \rightarrow$	1	5	11	20	33	17	10	0	2	1	100

Ejercicio 18

En una serie de cien síntesis de cinco microgramos de un compuesto orgánico, la temperatura y acidez (pH) *de las reacciones han sido las siguientes:*

t °C	pH	t °C	pH	t °C	pH	t °C	pH	t °C	pH
10	9	20	9	−20	5	−10	7	0	7
40	7	0	7	10	7	20	12	−20	2
−10	5	−20	7	−10	7	0	7	0	9
0	7	−10	5	20	9	−20	5	−10	7
30	7	10	9	0	7	10	9	20	12
10	9	0	7	30	7	−10	7	0	7
40	12	−30	5	−10	5	30	7	−20	5
−10	5	50	12	10	9	−30	2	10	9
0	7	−10	7	0	7	30	9	0	7
30	7	20	12	−20	2	−10	5	0	7
10	9	0	7	10	7	10	12	−30	2
50	12	−20	5	−10	7	0	7	30	9
−40	2	10	9	20	12	−20	5	−10	7
30	9	−10	9	0	7	10	7	20	7
−10	5	0	7	−20	7	−10	7	0	7
10	12	−30	2	10	9	20	9	−20	5
0	7	30	9	10	9	0	7	10	7
−20	5	−10	7	0	7	−10	5	−10	7
10	7	20	7	−30	5	−10	5	20	12
−10	7	0	7	40	12	10	9	0	7

Hágase el recuento y dispóngase una tabla de doble entrada para tabular esos números.

Las representaciones gráficas de estas distribuciones estadísticas bivariantes, aparte del ya citado *diagrama de dispersión,* son los *diagramas de ordenadas* y los *prismogramas*. Los primeros son adecuados cuando los dos caracteres de la variable son cualitativos o cuantitativos discretos; un prismograma es la representación adecuada si ambos caracteres de la variable presentan una distribución cuantitativa continua.

Para construir un diagrama de ordenadas se disponen unos ejes cartesianos tridimensionales, y en los ejes x e y del plano-base se representan los diversos valores o rúbricas de los dos caracteres. De este modo se consigue una cuadrícula-base, en la que cada uno de sus nudos representa una clave bivariante (x_i, y_i). Basta levantar segmentos perpendiculares en cada uno de los puntos, de longitud proporcional a las respectivas frecuencias, para completar el diagráma.

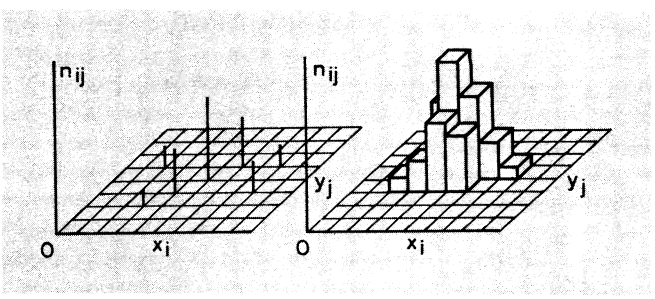


FIG. 5.19.

En la figura 5.19 representamos un diagrama de ordenadas y un prismograma de dos distribuciones aleatorias bivariantes imaginarias. Al no abordar en este curso distribuciones bivariantes continuas, no se describe la construcción del prismograma.

3. REGRESION. REGRESION LINEAL

La mayor o menor dependencia aleatoria entre los caracteres de una variable estadística bivariante se pone de manifiesto porque, al realizar su diagrama de puntos, aparecen éstos más o menos localizados en una determinada zona, que puede recordar una línea matemática de algún tipo: recta, parábola, hipérbola, etc. Pues bien, cuando en una muestra bivariante sucede que «aproximadamente» uno de los caracteres se puede considerar función del otro y, consecuentemente, la distribución puede quedar razonablemente representada por una determinada función matemática, se dice que existe *regresión* de los valores de uno de los caracteres respecto de los del otro.

A la línea que representa la distribución se la llama *línea de regresión* y, claro está, se podrá hablar de regresión lineal, hiperbólica, parabólica, etc., según sea la línea que represente la distribución.

No existe razón lingüística para tal nombre. El motivo es simplemente histórico. En 1866, GALTON publicaba un trabajo estadístico sobre la talla de los padres y la de la generación filial. Observó que, ciertamente, a padres altos corresponden hijos, también, de elevada estatura, y que padres de poca talla tenían, en general, hijos bajos. Pero, a la vez, se dio cuenta de que la estatura de los hijos, aun con las rúbricas apuntadas, tendía a «regresar» a la media de la raza; o sea, que padres altos engendraban hijos altos, pero menos que ellos, y que padres de poca talla tenían hijos bajos, pero más altos que ellos. Todo indicaba como si la estatura de la generación filial «regresara» a la talla media de la población.

El término «regresión estadística» con que GALTON publicara su trabajo se ha generalizado y hoy, sin sentido lingüístico alguno, se aplica a todo tipo de estudio de esta clase.

De todas las posibles regresiones, nosotros abordaremos la lineal, es decir, aquellas distribuciones bivariantes susceptibles de ser expresadas por una función lineal y, consecuentemente, representadas por una recta.

4. AJUSTE. METODO DE LOS MINIMOS CUADRATICOS

Ajuste es el problema que consiste en determinar la función matemática que mejor represente una distribución bivariante aleatoria. No es cuestión que se pueda dejar al buen criterio del analista, pues, de este modo, resultarían tantas *líneas de regresión* como apreciaciones subjetivas pudiera tener a la hora de interpretar el diagrama de dispersión.

En primera aproximación, una simple inspección ocular de la nube de puntos permitirá escoger la forma de la línea que va a representar la regresión; convendrá, a este respecto, trazar una línea provisional que deje tantos puntos por arriba de ella como por abajo.

Decidida la forma de la línea, por ejemplo, una recta, ha de resolverse el problema de calcular los parámetros de la recta que mejor represente la distribución. De todos los procedimientos para conseguirlo, el mejor, sin duda, es el que a continuación se desarrolla, bajo el título de

Método de ajuste por mínimos cuadráticos

Consiste este método en determinar los dos parámetros de la recta de regresión (su ordenada en el origen y su coeficiente angular), con la condición de que la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores reales y los estimados sea mínima *. Es decir, siendo

$$d = y - y_e$$

la condición descrita es

$$\Sigma d^2 = \text{mínima.}$$

Sea la recta de regresión

$$y_e = ax + b \qquad [16]$$

cuyos parámetros a y b se desean establecer por el método de los mínimos cuadráticos.

Según la condición de cálculo,

$$\Sigma(y - y_e)^2 = \Sigma(y - ex - b)^2 = \text{mínimo} \qquad [17]$$

Obsérvese que, para efectos de nuestro cálculo, las variables de [17] son a y b.

Para determinar los valores que hacen mínima una función, es necesario que su derivada primera sea nula. En el caso que nos ocupa, por tener dos variables, a y b, han de ser nulas las derivadas primeras parciales, respecto de a y respecto de b.

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{db} &= \Sigma\, 2(y - ax - b)(-1) = 2\Sigma(-y + ax + b) = 0 \\ \frac{d\Sigma}{da} &= \Sigma\, 2(y - ax - b)(-x) = 2\Sigma(-xy + ax^2 + bx) = 0 \end{aligned} \qquad [18]$$

Desarrollando los sumatorios de [18] y dividiendo por 2, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \text{I} \quad \Sigma y &= Nb + a\Sigma x \\ \text{II} \quad \Sigma xy &= b\Sigma x + a\Sigma x^2 \end{aligned}\right\} \qquad [19]$$

* Con el fin de conseguir mayor agilidad de lectura, se suprimen en el desarrollo subsiguiente los límites de los sumatorios que se puedan suplir, sin ambigüedad.

Las expresiones [19] constituyen las ecuaciones normales de la *recta de regresión de y sobre x*. Basta resolver el sistema, despejando a y b, para obtener la recta en su forma explícita.

$$y = \frac{\Sigma x \cdot \Sigma y - N\Sigma xy}{\Sigma^2 x - N\Sigma x^2}\, x + \frac{\Sigma y \Sigma x^2 - \Sigma x \Sigma xy}{N\Sigma x^2 - \Sigma^2 x}$$

Si en lugar de la recta $y_e = ax + b$ se trata de encontrar la recta $x_e = a'y + b'$, con la condición

$$\Sigma(x - x_e)^2 = \text{mínima},$$

se obtendrá una recta distinta de la anterior, denominada *recta de regresión de x sobre y*.

La razón de que ambas rectas no coincidan es precisamente que la dependencia es aleatoria y no funcional; en este último caso, ambas rectas se confundirían.

Ejercicio 19

Calcúlense, usando idéntico método al utilizado arriba, las ecuaciones normales de las rectas de regresión de x sobre y.

		Factor k												
	y \ x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	n_y	$\Sigma y = n_y y_i$	$\Sigma y^2 = n_y y_i^2$	$\Sigma xy = \Sigma n x_i y_i$
Factor Z	-2	1 8	2 12	2 8								5	-10	20	 28
	-1		3 9	8 16	9 9							20	-20	20	 34
	0			1 0	10 0	32 0	10 0	5 0		2 0		60	0	0	 0
	1				1 -1	1 0	6 6	2 4				10	10	10	 9
	2						1 2	3 12			1 10	5	10	20	 24
	n_x	1	5	11	20	33	17	10		2	1	100	-10	70	95
$\Sigma x = n_x x_i$		-4	-15	-22	-20	0	17	20		8	5	-11			
$\Sigma x^2 = n_x x_i^2$		16	45	44	20	0	17	40		32	25	239		Σ	
$\Sigma xy = \Sigma n x_i y_i$		8	21	24	8	0	8	16		0	10	95			

NOTA. El número superior de cada casilla es la frecuencia de la clase bivalente respectiva; el inferior es el producto nx_iy_i.

Ejemplo 15

Para realizar el ajuste y cálculo de las rectas de regresión del ejemplo 14, se dispone la tabla, de la página anterior, de datos y cálculos:

Recta de regresión de y sobre x

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -10 = 100b + a(-11) \\ \text{II} & 95 = b(-11) + a \cdot 239 \\ \hline & a = \ \ 0{,}40 \\ & b = -0{,}058 \end{array}$$

Recta de regresión de x sobre y

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -11 = 100b' + a'(-10) \\ \text{II} & 95 = b'(-10) + a' \cdot 70 \\ \hline & a' = 1{,}36 \\ & b' = 0{,}02 \end{array}$$

Así, pues, la recta de regresión de y sobre x tiene por ecuación

$$y_e = 0{,}40x - 0{,}058$$

y la de x sobre y es

$$y = \frac{1}{a'} x_e - \frac{b'}{a'}; \qquad y = 0{,}78\, x_e - 0{,}014$$

Ejercicio 20

Tal como ha mostrado el ejemplo anterior, hállense las rectas de regresión del ejercicio planteado con el número 18.

5. CALCULO ABREVIADO DE LAS RECTAS DE REGRESION

Supuestas establecidas las dos rectas de regresión, hagamos una traslación de ejes a un nuevo origen $O'(\bar{x}, \bar{y})$ cuyas coordenadas sean, precisamente, las medias de los dos caracteres de la variable, de modo que las coordenadas de un punto $P(x, y)$, respecto a los nuevos ejes, serán $P(x', y')$.

$$x' = x - \bar{x}$$
$$y' = y - \bar{y}$$

La recta de regresión de y sobre x, ahora tendrá por ecuación

$$y'_e = px' + q$$

con la condición

$$\Sigma(y' - px' - q) = \text{mínima.}$$

Derivando, como se hizo en el apartado 4, y reduciendo, se obtienen las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma y' = p\Sigma x' + N \cdot q \\ \Sigma x'y' = p\Sigma x'^2 + q\Sigma x' \end{array}\right\} \qquad [20]$$

Pero $\Sigma x' = \Sigma y' = 0$, por ser sumas de las desviaciones respecto de la media, resultando entonces:

$$\left.\begin{aligned} q &= 0 \\ p &= \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2} \end{aligned}\right\} \qquad [21]$$

El que sea $q = 0$ indica que la recta pasa por el nuevo origen, observándose además que su pendiente sigue siendo la misma.

Un cálculo análogo para la recta de regresión de x sobre y produce las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} q' &= 0 \\ p' &= \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2} \end{aligned}\right\} \qquad [22]$$

Si se desean obtener las rectas referidas a los ejes primitivos, basta deshacer la traslación:

$$\left.\begin{aligned} y_e - \bar{y} &= \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2}(x - \bar{x}) \\ x_e - \bar{x} &= \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2}(y - \bar{y}) \end{aligned}\right\} \qquad [23]$$

Ejemplo 16

Las rectas de regresión correspondientes al ajuste realizado anteriormente son las de la figura 5.20.

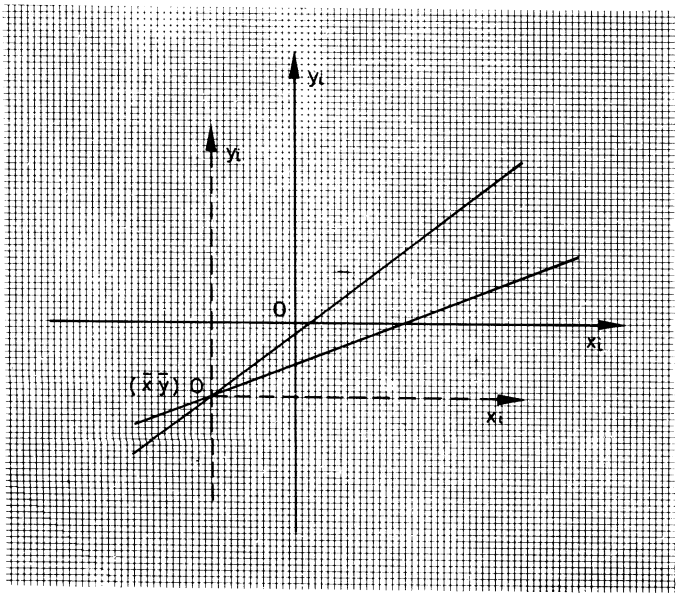


FIG. 5.20.

Ejercicio 21

Sobre un papel milimetrado de 11×5 mm, *represéntense las rectas de regresión del ejercicio 20.*

6. CORRELACION

Se denomina *correlación* a la relación de dependencia que existe entre los dos caracteres de una variable aleatoria bidimensional.

Si al dibujar el diagrama de dispersión resultara que la nube de puntos representativos se encontraran todos sobre una línea, la dependencia no sería aleatoria, sino funcional, y su correlación sería «perfecta». En ese caso, las dos rectas de regresión coincidirían.

Si la nube de puntos denuncia, al dispersarse por todo el plano, la independencia total de los dos caracteres de la variable, al intentar dibujar las rectas de regresión se obtendrían una paralela al eje OX, para la regresión de y sobre x, y una aproximadamente paralela al eje OY, para la regresión de x sobre y, resultando, en este caso, ambas rectas sensiblemente perpendiculares.

Entre los dos casos extremos descritos, la mayor o menor dispersión de la nube de puntos dará lugar a que ambas rectas de regresión formen un ángulo entre sí, mayor o menor, también.

Es muy importante conseguir medir esa dependencia entre los dos caracteres de la distribución, y por lo que se lleva escrito parece que el ángulo que forman entre sí las dos rectas de regresión sería una buena forma de cuantificar la correlación entre ambos caracteres. En efecto, se define:

6.1. Coeficiente de correlación lineal

Coeficiente de correlación lineal entre los dos caracteres de una variable estadística bivariante es la media geométrica de los coeficientes a y a', de sus rectas de regresión.

$$r = \sqrt{a \cdot a'} \qquad [24]$$

Analicemos ahora el comportamiento de la [24], en función de lo que pretende medir. Siendo a la pendiente de la recta de regresión de y sobre x y a', resultando ser la inversa de la pendiente de la recta de regresión de x sobre y, si por α y β se entienden las inclinaciones de las respectivas rectas, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} a &= \operatorname{tg} \alpha \\ a' &= 1/\operatorname{tg} \beta \end{aligned}\right\} \qquad [25]$$

y, entonces, sustituyendo [25] en [24], resulta:

$$r = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}}$$

Pero, siendo siempre $\beta \geqslant \alpha$, sucede que

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \leqslant 1.$$

Queda así claro que los valores extremos de r son

$$r = \sqrt{1} = \pm 1,$$

lo que sucederá cuando ambas rectas coincidan: se está frente a una dependencia funcional y la correlación entre las dos variables, entonces, es perfecta, lo que viene representado por el valor máximo de $r = 1$.

Por el contrario, si los dos caracteres de la variable bivariante resultan ser independientes, las dos rectas de regresión —como quedó dicho— son sensiblemente perpendiculares y $\alpha \simeq 0$ y $\beta \simeq 90°$. En este caso, el valor que toma r es

$$r = \sqrt{\frac{0}{\infty}} = 0$$

Así, pues, r se hace cero cuando la correlación es nula.

Puede ocurrir que α y β sean menores de 90°, con lo que sus tangentes son positivas. Se dice, entonces, que se trata de una *correlación directa* y, del signo doble de la raíz, se le asigna el positivo al coeficiente de correlación; si las inclinaciones de las rectas de regresión son mayores de 90°, ambas tangentes son negativas, y para ponerlo de manifiesto se le asigna a r el signo menos de la raíz cuadrada: se dice, entonces, que se trata de un caso de *correlación inversa.*

Ejercicio 22

Dígase de qué clase son las correlaciones de las distribuciones planteadas en el ejemplo 14 y el ejercicio 18.

6.2. El coeficiente de correlación y la desviación típica: covarianza

Según se vio en [23]:

$$a = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma x'^2} \quad \text{y} \quad a' = \frac{\Sigma x'y'}{\Sigma y'^2};$$

sustituyendo en [24],

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{\sqrt{\Sigma x'^2 \cdot \Sigma y'^2}} \qquad [26]$$

Multiplicando y dividiendo el denominador por el cardinal de la muestra, N, resulta:

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{N\sqrt{\frac{\Sigma x'^2}{N} \cdot \frac{\Sigma y'^2}{N}}}$$

Recordando que $x' = x - \bar{x}$ y que $y' = y - \bar{y}$, se tiene:

$$r = \frac{\Sigma x'y'}{N \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad [27]$$

A la expresión $\frac{\Sigma x'y'}{N}$ se le denomina *covarianza;* por eso se puede enunciar que:

> El coeficiente de correlación lineal es igual al cociente de la covarianza y el producto de las desviaciones típicas de cada uno de los caracteres.

6.3. Cálculo del coeficiente de correlación

En la ecuación [26], sustituyendo la x' y la y' por lo que significan, resulta:

$$r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x - \bar{x})^2 \cdot \Sigma (y - \bar{y})^2}}.$$

Desarrollando los sumatorios,

$$r = \frac{\Sigma xy - \bar{y}\Sigma x - \bar{x}\Sigma y + N \cdot \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma x^2 + N \cdot \bar{x}^2 - 2\bar{x}\Sigma x)(\Sigma y^2 + N \cdot \bar{y}^2 - 2\bar{y}\Sigma y)}}$$

Sustituyendo los valores medios por sus expresiones, se tiene:

$$r = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma y}{N} \cdot \Sigma x - \frac{\Sigma x}{N} \cdot \Sigma y + N \cdot \frac{\Sigma x}{N} \cdot \frac{\Sigma y}{N}}{\sqrt{\left(\Sigma x^2 + N \cdot \frac{\Sigma^2 x}{N^2} - 2\frac{\Sigma x}{N} \cdot \Sigma x\right)\left(\Sigma y^2 + N \cdot \frac{\Sigma^2 y}{N^2} - 2\frac{\Sigma y}{N} \cdot \Sigma y\right)}};$$

operando,

$$r = \frac{1/N \cdot (N \cdot \Sigma xy - \Sigma x \cdot \Sigma y)}{1/N \cdot \sqrt{(N \cdot \Sigma x^2 - \Sigma^2 x)(N \cdot \Sigma y^2 - \Sigma^2 y)}};$$

finalmente,

$$r = \frac{N \cdot \Sigma xy - \Sigma x \cdot \Sigma y}{\sqrt{(N \cdot \Sigma x^2 - \Sigma^2 x)(N \cdot \Sigma y^2 - \Sigma^2 y)}} \qquad [28]$$

Ejemplo 17

El coeficiente de correlación de nuestra distribución bivariante de los ejemplos precedentes es

$$r = \frac{100 \times 95 - (-11) \times (-10)}{\sqrt{(100 \times 239 - (-11)^2)(100 \times 70 - (-10)^2)}} = 0{,}73.$$

Ejercicio 23

Usando las pendientes de las rectas de regresión, calculadas en el ejemplo 15, compruébese el valor del coeficiente de correlación hallado en el ejemplo anterior.

Ejercicio 24

Calcúlese, usando la fórmula [28], *y compruébese, mediante las pendientes de las rectas de regresión, el coeficiente de correlación de la distribución del ejercicio 20.*

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DEL CAPITULO 5.2

18.

		Temperatura (x) t °C										
	x / y	−40	−30	−20	−10	0	10	20	30	40	50	Σn_y
pH (y)	2	1	3	2								6
	5		2	7	8							17
	7			2	11	21	5	2	4	1		46
	9				1	1	11	3	4			20
	12						2	5		2	2	11
	Σn_x →	1	5	11	20	22	18	10	8	3	2	100

19. $x_c = a'y + b'$;

$$\Sigma(x - x_c)^2 = \text{mínimo};\quad \Sigma(x - x_c)^2 = \Sigma(x - a'y - b')^2 = \text{mínimo};$$

$$\frac{d\Sigma}{db'} = \Sigma 2(x - a'y - b')(-1) = 2\Sigma(-x + a'y + b') = 0$$

$$\frac{d\Sigma}{da'} = \Sigma 2(x - a'y - b')(-y) = 2\Sigma(-xy + a'y^2 + b'y) = 0$$

$$\text{I}\quad \Sigma x = N \cdot b' + a' \cdot \Sigma y$$
$$\text{II}\quad \Sigma xy = b'\Sigma y + a'\Sigma y^2$$

Cáigase en la cuenta de que el símbolo $\Sigma b'$ significa sumar N veces b'.

20. Temperatura (x) t °C

pH (y)

y \ x	−40	−30	−20	−10	0	10	20	30	40	50	n_y	$\Sigma y = n_i y_i$	$\Sigma y^2 = n_i y_i^2$	$\Sigma xy = \Sigma n x_i y_i$
2	1 −80	3 −180	2 −80								6	12	24	−340
5		2 −300	7 −700	8 −400							17	85	425	−1400
7			2 −280	11 −770	21 0	5 350	2 280	4 840	1 280		46	322	2254	700
9				1 −90	1 0	11 990	3 540	4 1080			20	180	1620	2520
12						2 240	5 1200		2 960	2 1200	11	132	1584	3600
n_x	1	5	11	20	22	18	10	8	3	2	100	731	5907	5080
$\Sigma x = n_x x_i$	−40	−150	−220	−200	0	180	200	240	120	100	230			
$\Sigma x^2 = n_x x_i^2$	1600	4500	4400	2000	0	1800	4000	7200	4800	5000	35300			
$\Sigma xy = \Sigma n x_i y_i$	−80	−480	−1060	−1260	0	1580	2020	1920	1240	1200	5080			

Recta de regresión de y sobre x

I $\quad 731 = 100b + a \cdot 230$

II $\quad 5080 = b \cdot 230 + a \cdot 35300$

$a = 0{,}097$

$b = 7{,}08$

$y_e = 0{,}097\, x + 7{,}08$

Rectas de regresión de x sobre y

I $\quad 230 = 100b' + a' \cdot 731$

II $\quad 5080 = b' \cdot 731 + a' \cdot 5907$

$a' = 6{,}03 \Longrightarrow 1/a' = 0{,}16$

$b' = -41{,}78$

$y = \dfrac{1}{a'} x_e - \dfrac{b'}{a'} \Longrightarrow y = 0{,}16\, x_e + 6{,}9$

21.

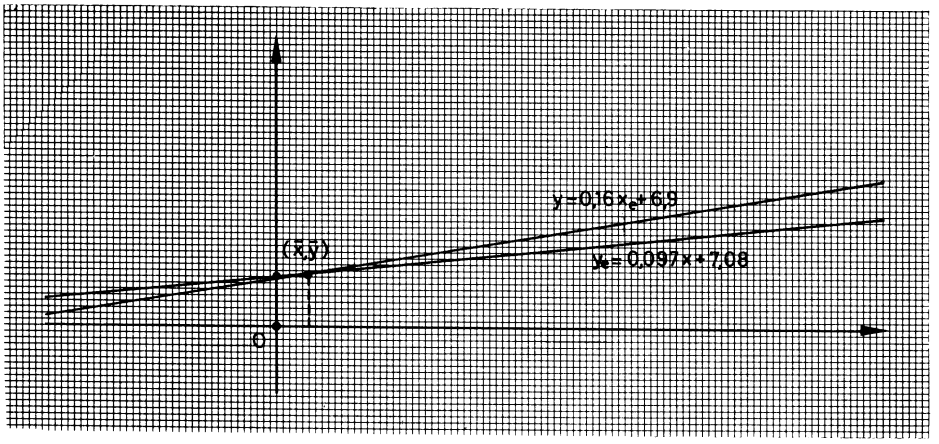


FIG. 5.21.

22. Ambas son directas, pues las inclinaciones de sus rectas de regresión son menores de 90°.

23. $r = \sqrt{\text{tg } \alpha / \text{tg } \beta} = \sqrt{0{,}40/0{,}73} = 0{,}74.$

24. $$r = \frac{100 \times 5080 - 230 \times 731}{\sqrt{(100 \times 35300 - 230^2)\,(100 \times 5907 - 731^2)}} = 0{,}76;$$

$r = \sqrt{\text{tg } \alpha / \text{tg } \beta} = \sqrt{0{,}097/0{,}16} = 0{,}7.$

5.3

Ejercicios y problemas de recapitulación

1. El estribillo de una canción medieval se ha transmitido oralmente hasta el siglo XVII, en que aparece por primera vez registrado por escrito. Admitiendo que en ese tiempo se han sucedido ocho generaciones y estimando la fiabilidad de la transmisión generacional en 0,9, ¿en qué tanto por ciento se puede entender como genuino el estribillo reseñado?
2. Se lanza una moneda homogénea al aire. ¿Qué probabilidad hay de obtener cuatro caras en seis pruebas? y, ¿cuál la de obtener, al menos, cuatro caras en el mismo número de experiencias?
3. Se lanzan dos dados cinco veces. Hállese la probabilidad de obtener el mismo número en ambos, al menos, dos veces.
4. Se lanza un dado homogéneo cinco veces. Estabiézcase la distribución de probabilidades de que salga el 3, i veces. Determínense, también, la media y la desviación típica de esa distribución.
5. Se lanza un dado homogéneo al aire 216 veces. Determínese el número de veces que cabe esperar que no salga el 3, así como la varianza de la distribución.
6. Se lanzan al aire cinco dados, 1 000 veces. Contando los sucesos en los que ha aparecido el número 1 se han conseguido los siguientes números:

Número de dados con el 1:	x_i	0	1	2	3	4	5
Veces que ha salido:	n_i	25	130	205	340	230	70

Ajústese una distribución binomial a esa muestra, a partir de la media $\mu = n \cdot p$.

7. La media y desviación típica de una prueba objetiva pasada a un curso han resultado ser $\bar{x}=22$ y $\sigma=5{,}8$. Admitiendo que se trata de una distribución normal, calcúlese el tanto por ciento de alumnos que ha conseguido menos de 32 aciertos.

8. Con los mismos datos del problema anterior, determínese el número de alumnos que han conseguido entre 20 y 30 aciertos, sabiendo que la matrícula del curso es de 200 alumnos.

9. Determínese el intervalo de aciertos en el que está comprendido el 50 por ciento central de la distribución de los ejercicios anteriores.

10. En 500 muestras de un determinado fármaco se han encontrado las siguientes trazas de arsénico:

m_i ($g \times 10^{-6}$)	n_i
1,81 – 1,83	5
1,84 – 1,87	25
1,88 – 1,91	35
1,92 – 1,95	55
1,96 – 1,99	78
2,00 – 2,03	100
2,04 – 2,07	85
2,08 – 2,11	50
2,12 – 2,15	45
2,16 – 2,19	12
2,20 – 2,23	10
	$\Sigma n_i = 500$

Ajústese una distribución normal a la distribución de estas muestras, determinando la frecuencia teórica de los intervalos de clase establecidos.

11. Calcúlese la recta de mayor ajuste a los datos de la siguiente tabla, dibujando previamente el diagrama de dispersión.

x	1	3	5	6	8	9	11	14
y	1	2	4	5	5	8	9	9

12. Determínese la recta de regresión de x sobre y de la distribución anterior.

13. Dibújense las dos rectas correspondientes a los ejercicios anteriores y calcúlese el coeficiente de correlación.

14. Una variable aleatoria bidimensional tiene por rectas de regresión mínimocuadráticas $3x+2y-24=0$ y $6x+y-30=0$. Calcúlense los valores medios y el coeficiente de correlación.

15. Dada la distribución del problema 11, determínense σ_x, σ_y y la covarianza.

16. Con los resultados del problema 15, calcúlese el coeficiente de correlación.

17. Determínese el ángulo φ que forman las rectas de regresión de una distribución bivariante de desviaciones típicas σ_x y σ_y, y de coeficientes de correlación r.

18. Las tallas de diez padres y las correspondientes de sus hijos primogénitos varones son las que se registran:

x	1,63	1,66	1,64	1,68	1,69	1,62	1,70	1,67	1,68	1,71
y	1,66	1,68	1,66	1,68	1,68	1,65	1,69	1,66	1,70	1,70

Calcúlense las rectas de regresión.

19. Hállese el coeficiente de correlación lineal de la distribución del ejercicio anterior.

20. Aplíquese el cálculo abreviado de las rectas de regresión, para la resolución del ejercicio 18.

5.4

Autoevaluación A-5

1. La frecuencia del suceso «5 puntos» al lanzar un dado al aire 100 veces es

   a) 1/6;
   b) 100/6;
   c) 6/100;
   d) no tiene sentido el planteamiento.

2. Una variable aleatoria dicotómica es

   a) la cuantitativa que varía de unidad en unidad;
   b) la cualitativa con dos rúbricas;
   c) la cuantitativa discreta;
   d) la cualitativa merística.

3. Muestra es un subconjunto

   a) cualquiera de la población;
   b) representativo de la población;
   c) aleatorio de la población;
   d) representativo y aleatorio de la población.

4. La función

$$\begin{aligned} \wp(H) &\xrightarrow{f} \mathfrak{R} \\ H_i &\longrightarrow f(H_i) = p(H \leqslant H_i) \end{aligned}$$

   es la función de

   a) distribución;
   b) densidad;
   c) probabilidad;
   d) probabilidad acumulada.

5. La ordenada máxima de un diagrama de distribución

a) es igual a N;
b) vale la unidad;
c) depende del máximo de la distribución.
d) es el 50 por ciento de la muestra.

6. Sólo una de estas cuatro columnas contiene todas sus expresiones correctas. Márquese.

a) $\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i + \mu)^2 p_i$

$\mu = np$;

b) $\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$

$\sigma = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$

$\sigma = \sqrt{npq}$;

c) $\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$

$\sigma^2 = npq$;

d) $\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$

$\sigma = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu) p_i$

$\mu = np$.

7. La expresión $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ vale

a) $p - q = 1$;
b) 1;
c) σ^2;
d) $n \cdot p$.

8. En un histograma simétrico binomial se reconoce que

a) $p = q$;
b) $np \geqslant 5$;
c) $np \leqslant 5$;
d) $npq = \sigma$.

9. La gráfica de una distribución normal es la de una de estas cuatro funciones. Descúbrase:

a) $y = \dfrac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\sigma}{\mu}\right)^2}$;

b) $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$;

c) $y = \dfrac{1}{\pi\sqrt{2\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$;

d) $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

10. La diferencia entre las abscisas de una inflexión y la media, en una distribución normal, mide

a) la propia media;
b) el 50 por ciento central de la distribución;
c) la varianza;
d) la desviación típica.

11. Los valores de $f(x)$ en la curva normal

a) representan probabilidades;
b) multiplicados por Δx, representan probabilidades;
c) son probabilidades acumuladas;
d) son frecuencias teóricas de cada una de las clases.

12. En una distribución $\varphi(z)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z^2}$,

a) la media coincide con la desviación típica;
b) la media es siempre la unidad;
c) la media es nula;
d) la desviación típica es nula.

13. En una distribución normal, en el intervalo $(-\sigma, +\sigma)$, centrado sobre la media, se encuentran

a) el 50 por ciento de los individuos de la distribución;
b) el 95 por ciento de los individuos de la distribución;
c) el 68 por ciento de los individuos de la distribución;
d) depende del mayor o menor valor de σ.

14. El coeficiente a de la recta de regresión de y sobre x es 0,40, y el de la recta de regresión de x sobre y es $a'=2$. Eso quiere decir que

a) hay una fuerte correlación;
b) la correlación es muy débil;
c) no se trata de una correlación directa;
d) no es posible el planteamiento.

15. Siendo correcta para el coeficiente de correlación lineal, la expresión

$$r=\frac{s}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

el símbolo s representa

a) la varianza de la distribución;
b) la regresión;
c) la covarianza;
d) la suma de las desviaciones $x_i-\bar{x}$.

16. En el ajuste de la regresión lineal de y sobre x, por el método de los mínimos cuadráticos, la función Z que ha de ser mínima es

a) $\Sigma(x - x_e)^2$;
b) $\Sigma(y - ax - b)^2$;
c) $\Sigma(x - a'y - b')^2$;
d) $2\Sigma(-y + ax + b)$.

17. Se lanzan dos dados homogéneos sobre la mesa y se ve la suma de puntos conseguidos. Calcular $p(7)$ y $f(7)$.

18. Calcúlense la media y la desviación típica de la distribución del ejercicio anterior.

19. ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar seis veces al aire una moneda trucada con probabilidad de obtener cara $p = 1/4$, se obtengan dos caras?

20. ¿Qué probabilidad hay de encontrar entre todas las familias con seis hijos una que tenga, al menos, cuatro varones?

21. La probabilidad de conseguir un resultado A es $p = 0{,}8$. ¿Qué probabilidad hay de que se verifique no menos de tres veces y no más de seis, en diez pruebas?

22. Dada la distribución

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	0	8	21	32	31	8

ajústese a una distribución binomial, que se pide establecer.

23. En una distribución $N(50, 5)$, determínese la probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre 32 y 40.

24. Una variable aleatoria bidimensional tiene por rectas de regresión minimocuadráticas $x + 2y - 7 = 0$ y $x + y + 2 = 0$. Calcúlense los valores medios y el coeficiente de correlación.

25. Determínese el ángulo φ que forman las rectas de regresión de una distribución bivariante, de desviaciones típicas σ_x y σ_y y de coeficiente de correlación r.

FICHA-CLAVE DE LA AUTOEVALUACION A-5

1. *d).*	**5.** *b).*	**9.** *b).*	**13.** *c).*
2. *b).*	**6.** *c).*	**10.** *d).*	**14.** *d).*
3. *d).*	**7.** *b).*	**11.** *b).*	**15.** *c).*
4. *a).*	**8.** *a).*	**12.** *c).*	**16.** *b).*

17. $p(7)=6/36$; $f(7)=21/36$.

18. $\mu=7$; $\sigma=+\sqrt{35/6}$.

19. Véase el ejemplo 6.

20. Consúltese la solución del ejercicio 10.

21. $p=0{,}1208$.

22. Está desarrollado en el ejemplo 9.

23. Compruébese con la solución del ejercicio 15.

24. $(\bar{x}, \bar{y})=(-11, 9)$; $r=\sqrt{2}/2$.

25. $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sigma_x\cdot\sigma_y}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\cdot\dfrac{1-r^2}{r}$.

Alhambra

Autorizado por el Ministerio de Educación y Ciencia, para su utilización en el tercer curso del Bachillerato, por Orden del 11-5-1977. («B.O.E.» del 4-7-1977.)